パーコレーションとランダムグラフに関する研究

2002MM009 郷司　岳路　 2003MM110 虎山　泰昌

指導教員: 尾崎　俊治

1　はじめに

スポンジなどのような小さな穴がいくつも存在する物質に液体を染み込ませたとき, どのように液体は浸透していくのか. これを実際に目で見ることはできないが, 液体の動きはスポンジ内の小さな穴から穴へと伝わっている. これはパーコレーション(percolation)と呼ばれる物理の現象である. このように上から下, もしくは横の穴から穴へ広がっていく現象は, 液体に限らず他にも私たちの生活の中にいくつも存在している.

穴から穴へ広がる際に確率を考えれば, このような現象は確率論の問題となる.

本研究ではパーコレーションの基本となる理論を学ぶと共に, 数多くあるパーコレーションの現象の中で解析できそうな生活の中に実際にある問題を用いて, モデル化して研究を行う.

2　パーコレーション

2.1　サイトパーコレーション

正方格子のマス目にまったくでたらめに色を塗っていく. この塗りつぶされた部分のつながりを考え, 上下または左右の隣り合ったもの同士がつながるものとする. ここで塗りつぶす部分の割合などを変化させる. 割合の少ないときには, 1つの塊は小さく, 塗りつぶされていない部分に囲まれる. この塊をクラスター(cluster)と呼ぶ. 1つのクラスターの大きさは, その塗られたマスの数とする. 割合が小さければ, できるクラスターは小さい. だが割合を大きくし100%に近づけると, 1つの大きなクラスターとなり, 正方格子の上下, 左右の端から端までつながる. このような形でクラスターを形成する過程を, サイトパーコレーションという.

図1はサイトパーコレーションの例として作図したものである. 10×10の2次元格子のマスに, ランダムに色を塗る. 塗られたもの同士が隣り合いつながったものが, クラスターである. 図1には3つのクラスターが存在する.

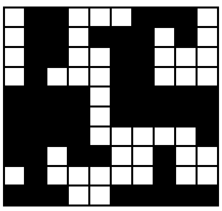

図 1: サイトパーコレーション

2.2　ボンドパーコレーション

今度は格子点同士をランダムに太い線分でつなげたものを考える. この太い線分でつなげられた部分をクラスターとする. ここでもボンドの割合を変化させることで, さまざまなクラスターを作ることができる. この過程をボンドパーコレーションという.

図2は点と点をランダムに線で結んだ図の例である. この時に線で結ばれたボンド, あるいはサイトがクラスターとなる. 図2においては4つのクラスターが存在する.

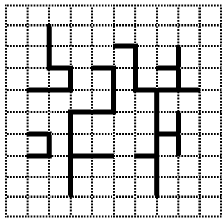

図 2: ボンドパーコレーション

2.3　パーコレーションの確率変化モデル

ここでは実際に確率を変化させることで, どのようなクラスターができるかを調べる.

図3, 4, 5はExcelにより0から99までの数をランダムに示したものである. また, 図3は $p = 0$, 図4は $p = 0.5$(0から49), 図5は $p = 0.75$(0から74)で黒く塗りつぶしてある. 確率が大きくなるほどクラスターは大きくなる.

27	22	14	88	50	25	52	99	83	6
96	71	90	78	99	68	89	28	62	29
35	32	90	28	87	14	30	35	70	89
97	88	57	5	10	40	86	69	86	20
47	33	93	77	87	31	5	59	50	61
55	14	34	89	0	94	48	3	0	82
31	88	41	70	23	42	91	10	87	41
24	0	98	67	60	83	30	18	39	22
42	91	64	46	54	60	39	74	95	46
52	81	29	14	24	26	87	66	50	27

図 3: サイトパーコレーション($p = 0$)

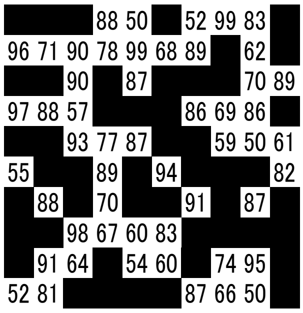

図 4: サイトパーコレーション($p = 0.50$)

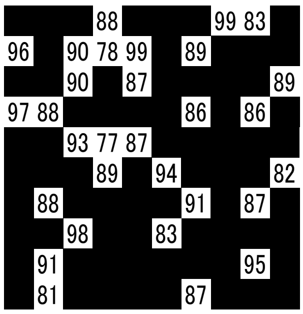

図 5: サイトパーコレーション($p = 0.75$)

3　臨界浸透確率

3.1　各次元の臨界浸透確率

パーコレーションでのサイトが開く確率を p としたとき, サイトが閉じる確率は $1-p$ である. このサイトが開く確率 p を変化させせることで, さまざまな大きさのクラスターを作ることができる. 確率 p を大きくしていけば, 無限に大きなクラスターが存在しない相である非浸透相から, 存在する相である浸透相へと相転移する. このような現象を相転移現象と言う. この非浸透相から浸透相に変わる境目を臨界点といい, このときの確率 p のことを臨界浸透確率(critical percolation probability)と呼ぶ. これらのことから,

$$p < P_c \text{のとき無限クラスターはできない} \tag{1}$$

$$p > P_c \text{のとき無限クラスターはできる} \tag{2}$$

ということが言える.

さらにここでは各次元の格子における臨界浸透確率について求める.

1次元格子では1箇所でも切れると両端はつがらなくなるので, $P_c = 1$ となる. このことは一本の線を途中で切ってしまえば無限でなくなるということを考えれば明らかである. ただし2次元格子, 3次元格子の臨界浸透確率 P_c は, いくつかの例外を除き求めることができません. そこで実際にいくつかのランダムグラフより統計を取り, 臨界浸透確率を求めてみる.

方法としてはExcelを利用し, さまざまなランダムに打ち出した図がどれほどの臨界浸透確率で無限クラスターを作るかを調べる. またこの際, 2次元のサイト過程により考えるものとする. 今回は50個のランダムグラフより統計を取った.

その結果, 臨界浸透確率は0.58から0.62のあたりにあると予想される.

ここでもう既にコンピュータシミュレーションによって求められている臨界浸透確率を[4]より引用した. 表1, 2, 3は様々な格子の臨界浸透確率を, サイト過程とボンド過程で表したものである.

表 1: 臨界浸透確率(2次元)

(2次元格子)	配位数	サイト過程	ボンド過程
正方格子	4	0.593	0.5
三角格子	6	0.5	0.347
六角格子	3	0.696	0.653
カゴメ格子	4	0.653	0.449
ペンローズ	4	0.584	0.477

この結果から我々の生活の中でもっともこの結果が反映されているのが, ビンゴゲームである. ビンゴゲームを正方格子のサイト過程に見立てて考える. 表1より, 正方格子のサイト過程は0.593となっている. つまり, 60%の数が読み上げられた時点でほぼすべての人がビンゴするであろうと予想される.

表 2: 臨界浸透確率(3次元)

(3次元格子)	配位数	サイト過程	ボンド過程
単純立方格子	6	0.312	0.249
体心立方格子	8	0.246	0.179
面心立方格子	12	0.198	0.119
ダイヤモンド格子	4	0.428	0.388

表から, 次元が同じであっても格子が違えば臨界浸透確率は変わってくる. そこで格子の形によらず, 次元のみで定まった次元不変量が知られている. これは充填率を利用して求めることができる. 充填率とは, 格子点を中心とし最近接する円と円が接するとき, この格子における円の面積割合である. 充填率との関係で見ると, サイト過程の臨界浸透確率 P_c と充填率 f の積はほぼ一定となることが実際に確かめるられている.

$fP_c = 0.45 \pm 0.03$　(2次元サイト過程)
$fP_c = 0.16 \pm 0.02$　(3次元サイト過程)
この数値より, 2次元では約45%, 3次元では約16%円板または球で占められていると, 互いに接した円板または球が無限につながることになる.

一方ボンド過程においては, 臨界浸透確率 P_c と配位数 z の積がほぼ一定となると言われている.
$zP_c = 2.0 \pm 0.2$　(2次元ボンド過程)
$zP_c = 1.5 \pm 0.1$　(3次元ボンド過程)
つまり, 2次元格子では格子点から平均2本の配線, 3次元格子では平均1.5本の配線が出ていれば無限につながることになる.

さらにサイト過程においては別の次元不変量が知られている．最近接するサイトだけでなく，離れたサイトにもボンドをつないで考えるものである．この場合，格子点から出ているボンドの数を m として，臨界浸透確率を $P_c^s(m)$ とする．このとき正方格子においては,
$P_c^s(4) \simeq 0.593$ ($m = 4$のとき)
$P_c^s(8) \simeq 0.410$ ($m = 8$のとき)
$P_c^s(18) \simeq 0.137$ ($m = 18$のとき)
となる.

さらに密度 n で点をランダムに配置したものを考える. 点がランダムに配置されているということは，格子と違い点と点が隣り合うということ，点と点の距離が同じだという概念はなくなる．そこで各点を中心とし，半径 R の円（球）をを描く．このときに円（球）内に入った点のつながりで考える．点の密度を一定とし半径を変化させるか，半径を一定とし点の密度を増やすとあるところで無限につながる．臨界浸透確率はつながりの範囲を表し，半径と点の間の平均距離 r_s の比によって決まるとされている．r_s は
$n\pi(\frac{r_s}{2})^2 = 1$ (2次元)
$n(\frac{4\pi}{3})(\frac{r_s}{2})^3 = 1$ (3次元)
となる.
コンピュータシミュレーションによって結果は,
$(\frac{R}{r_s})_c = 1.06 \pm 0.01$(2次元)
$(\frac{R}{r_s})_c = 0.705 \pm 0.004$(3次元)
となると言われている.

3.2　配水管モデル

ここではどのように配水管を設置すれば良いかについて考える.

配水管においては平均1本のボンドがつながっていれば無限につながる.

つまり1本のサイトから2本のボンドが出ていれば無限につながる．ただし，水の流れる向きも考えれば，サイトに入ってくる側と出て行く側があり，計4本のボンドが必要となる.

ここでは2つのパターンについて考える．配水管の1つのボンドの中に複数の管を通す場合と，1本の管を通す場合である．複数の管を通す場合には，2本以上を通せばよく，1つの点から1つの点へのボンド数が少なくても十分に対応できる．この場合，管を通す場所が少なくてすみ，土地の関係上いくつも管が通せなくてもすむ．それに対し，1本の管にした場合には最低でも1つの点から4本出す必要があると考えられる．四国のＴ市においては，サイトからのボンド数1本の点が2箇所，2本の点が56箇所，3本の点が143箇所，4本が21箇所，5本が1箇所となっている．この場合1本の管として考える場合では，改善すべきだが，2本以上と考えるならば良いこととなる[7].

3.3　ツリー・ベーテ格子

基本的に P_c の厳密解を求めることはできない. しかし, ツリーとベーテ格子に関しては求めることが可能である.

まずは2分木について考える. 原点を0世代と考え, ここには2つのサイトが存在するとする. 次の第1世代には, 前世代から2つのサイトがそれぞれからつながっていると考える. このようにして第 n 世代までつないだと考えると, 2^n 個のサイトが存在することになる. 原点には2つの最近接のサイトしか存在しないが, 他のサイトには, 3つのサイト, 3つのボンドが存在する.

正方格子や立方格子との違いは, ループすることがないということである. それにより前のサイトにつながるサイトの数は2項分布の確率変数となります.

次に配位数 z のベーテ格子について考える. この格子は各サイトが z 個の最近接点を持ち, z 本のボンドを持つというものである. またこのうちの1本は原点と結ばれており, 残りの $(z-1)$ 本は新たなサイトと結ばれ, これが繰り返されている.

表 3: 臨界浸透確率（ツリー・ベーテ格子）

	配位数	サイト過程	ボンド過程
2分木	3(2)	0.5	0.5
ベーテ格子	z	$\frac{1}{z-1}$	$\frac{1}{z-1}$

ベーテ格子の例として伝言ゲームが挙げられる。始め1人の人が3人に伝言したとして，以後同様に伝えていくと，$P_c = \frac{1}{2}$ の確率で正しく伝えられれば，無限につながる．また4人5人と人数を増やしていくと，臨界浸透確率はそれぞれ $P_c = \frac{1}{3}$，$P_c = \frac{1}{4}$ となる．つまり，人数を増やせば，臨界浸透確率は低下し，高い確率で無限につながることとなる。

ベーテ格子を利用したパーコレーションによって伝染病について考える.

一人の感染者がいたとして，その人の周りにいる人が多ければ多いほど，低い臨界浸透確率で感染者が増えることとなる．つまり，感染者の周りに人が多ければ，いくら感染力の弱い病気であっても，無限に広がる可能性を持っている．伝染病の感染者が出た場合にはできる限り感染者とのつながりを切ることが，広がりを防げることにつながる.

ただインフルエンザなどの感染病については，時間が経てば治ることから，決して無限のパーコレーションとはならない。

だが，このベーテ格子をもっとも反映したのがエイズである．1人の感染者に対し，つながりがあれば広がっていく．かつ，エイズは感染力が強いので，たとえ人数が

少なく臨界浸透確率が高くても，無限に広がる可能性を持っている.

実際にエイズがなくなることがないのもこうしたことが理由の一つであると考えられる.

4　マインスイーパ

パーコレーションの応用としてMicrosoftのWindowsに入っているマインスイーパというゲームを考える.

4.1　マインスイーパのルール

マインスイーパには, 正方形のマスが敷き詰められた盤面とその盤面の中に含まれている爆弾（地雷）の数が表示されている.

そのマスの中には爆弾か1〜8までの数字, 空白（数字の0）のいずれかが隠れているが, ゲーム開始時には各マスがなにであるか分からない. マスが数字であるとき, その数字の周囲8マスの中に含まれている爆弾の数を示しているものとする. ただし空白を引いたときは, 周囲に爆弾がないため，そのマスから爆弾のある隣のマスの数字まで全て開く.

プレイヤーはマスをめくることで, その中に隠れている数字を知ることが出来る. ただしそのマスが爆弾であれば, その時点でゲームは終了となり，答えとして全ての爆弾の位置が表示される. このような条件の中ですべての爆弾の位置を求めるのがマインスイーパというゲームである.

ゲーム開始直後は盤面内の爆弾の位置の情報はないので適当にめくっていく. そして盤面内の爆弾の位置の情報を部分的に得ることを繰り返していき, 爆弾を引くことなく全ての爆弾の位置を突き止め, 爆弾のマスを除くすべてのマスを開くことが出来ればゲームクリアとなる.

4.2　マインスイーパの定式化

盤面 B の大きさを縦 m マス, 横 n マスとし, 盤面 B のサイズが $m\times n$ であるということとする. もちろん $m,n\geqq 1$ である. 盤面の中に存在する爆弾の個数を b と表すこととする. 左下隅のマスを $P_B(0,0)$ として $P_B(0,0)$ から上に i マス, 右に j マスの位置にあるマスを $P_B(i,j)(0\leqq i<\mathrm{m}, 0\leqq j<n)$ とする.

$P_B(i,j)$ に隣接する8マスの集合を $N_B(i,j)$ とするとその要素は,

$N_B(i,j)=\{P_B(i-1,j-1),P_B(i-1,j),P_B(i-1,j+1),P_B(i,j-1),P_B(i,j+1),P_B(i+1,j-1),P_B(i+1,j),P_B(i+1,j+1)\}$

となる. ただし i,j の値によっては存在ものもあるので, これら存在しないものは N_B に含まれないものとする.

マス P_B に隠されている数字, 空白または爆弾を $S_B(i,j)\in S=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,*\}$ とする. ただし0は空白を表し, $*$ は爆弾を表すものとする.

関数$f:S\rightarrow 0,1$を$x=*$のとき$f(x)=1$, それ以外のときは$f(x)=0$と定義する. $S_B(i,j)\neq *$のとき, マスの中の数字は$S_B(i,j)=\sum_{P_{B(x,y)}\in N_B(i,j)} f(S_B(x,y))$ と表せる. また, 盤面の中の爆弾の個数は $b_B=\sum_{i,j} f(S_B(i,j))$ と表せる[6].

4.3　クラスター

マインスイーパでハイスコアを意識するならば, 素早くクリアするようにすればよいが, 爆弾の数や配置によってはワンクリックの1秒でクリアすることも可能である.

ワンクリックでクリアできる爆弾の配置はクラスターと関係がある.

マインスイーパで考えるクラスターの大きさは, 空白とその周りの数字までの大きさであるものとする. つまり空白を引いたときに開くマス全てを一つのクラスターとする.

数字のみでまわりに１つの空白もないもののクラスターの大きさは１である. 爆弾はクラスターの大きさ0である.

盤面 B の大きさが $m\times n$ で爆弾数 b のとき, 爆弾の位置次第で出来る最大のクラスターの大きさ $S_{B_{max}}=mn-b$ の大きさのクラスターが出来る. もしある盤面の最大クラスターの大きさ S_B が $S_B=mn-b$ であるなら, ワンクリックでクリアできる可能性がある.

ワンクリックでクリアするためには，もう一つ条件が必要である. ある盤面の最大クラスターの大きさが $mn-b$ であっても最初に数字をめくってしまうとその数字のマス1枚だけしか開かない. よってワンクリックでクリアするためには$S_B=mn-b$ かつ最初に空白をめくればよい. または最大のクラスターが存在するということはクラスターの数は１つしかないので, 盤面 B のクラスターの数は1でありかつ最初に空白をめくればよい.

5　おわりに

パーコレーションの考え方は, つながりを持つすべてのスケール現象に応用させることができる. 無限につながるかつながらないかで，様々な現象に良い結果も悪い結果ももたらす. 今回の研究によりその境目となる確率が分かり，どのようにして改善すれば良い結果を導き出せるかということも考えることができた. 配水管の破損モデル，マインスイーパのつながりなど，最適となるモデルについても確認できた. 今後，得られた知識を活かす機会があればそれを有効に活用したい.

参考文献

[1] R. B. シナジ:マルコフ連鎖から格子確率モデルへ,第４章,シュプリンガー・フェアラーク東京(2001)

[2] Ya. G. シナイ:シナイ確率論入門コース,シュプリンガー・フェアラーク東京 (1995)

[3] G. Grimmet: Percolation, 2nd ed. ,Spring-Verlag,Berlin (1999)

[4] 小田垣:パーコレーションの科学,裳華房(1993)

[5] 上田尚一:クラスター分析,朝倉書店 (2003)

[6] 九州産業大学情報科学会誌 2巻1号 (2004年7月)

[7] 三根久：モンテカルロ法・シュミレーション，コロナ社（1994）