

多期間確率計画モデル シミュレーション型モデル

2003MM057 松尾 匠

指導教員: 國田 寛

1 はじめに

投資家がどの投資対象にどれだけ投資したらよいかという問題をポートフォリオ選択問題という。ポートフォリオ選択は投資家の満足度を最大に行われる。

資産配分問題とは、アセット・アロケーション問題と呼ばれており、投資対象資産の組合せ比率を決める問題である。資産投資を行う場合、株式や債券という資産区分(アセット・クラス)の組み合わせ比率を決めることをアセット・アロケーションと呼び、次にそれぞれの資産の中で個別銘柄の組み合わせを決める。一期間と比べ多期間確率計画モデルの概要から必要性を説明する。

多期間確率計画モデルについての理論を学び、実際の株価をシミュレーション型多期間確率計画モデルを用いて現実的な数値実験を行う。

2 多期間確率計画モデル

多期間にわたる資産配分問題を確率的な制御の問題として考えてみよう。この問題は、投資家にとって最大の期待効用、もしくは好ましいリスク・リターンを得られるように、各時点でのポートフォリオの収益の確率分布を制御する動的な資産配分を決定する問題である。

ポートフォリオの収益(富)は、

- ・ポートフォリオの構成
- ・ポートフォリオに含まれる資産価格変動の確率分布によって決まる。各資産変動の確率分布はあらかじめ想定された分布を用いるが、各時点でのポートフォリオの構成によって様々に変化する。

実際に多期間確率計画問題を解くためのモデルとしては、近似の方法が異なるシナリオ・ツリー型多期間確率計画モデルとシミュレーション型多期間確率計画モデルの2種類のタイプのモデルを用いることができる。今回シミュレーション型多期間確率計画モデルにおいて研究を行う。

3 シミュレーション型計画モデル

シミュレーション型多期間確率計画モデルではシミュレーション経路によって、将来の資産価格の不確実な変動を記述する。シミュレーション経路は1本の経路にだけ注目すると、 t 時点の状態の次に発生する $t+1$ 時点の状態はひとつしか想定しない。したがって各状態ごとに投資の意志決定を別々に行うと、それは確定条件化での意志決定を行うことになる。シミュレーション型モデルの場合には、すべての時点で状態に依存しない取引戦略による意志決定を行わなければならない。

3.1 3つのモデル

- ・投資比率決定モデル

どの状態が生じた場合でも、取引後の危険資産 j への投資比率および現金の保有比率を同一にする。

- ・投資額決定モデル

どの状態が生じた場合でも、取引後の危険資産 j への投資額を同一にする。各経路での富は異なるが、その富と危険資産への投資額の違いはすべて現金の保有額は同一ではない

- ・投資量決定モデル

どの状態が生じた場合でも、取引後の危険資産 j への投資額を同一にする。各経路での富は異なるが、その富と危険資産への投資額の違いはすべて現金の保有額は同一ではない

3.2 モデルの定式化

- ・添字

i : 経路パスを表す添字

- ・パラメータ

I : 経路の本数

$\mu_{jt}^{(i)}$: 期間 t の経路 i の危険資産 j の投資収益率

W_0 : 0時点での富(初期富)

W_E : 計画最終時点で投資家が要求する期待富

W_G : 計画最終時点での目標富

- ・決定変数

ω_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資比率

$W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富

$q^{(i)}$: 計画最終時点の経路 i の富の目標富に対する不足分

3.2.1 投資額決定モデル

x_{jt} : t 時点の危険資産 j の投資額

($j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1$)

v_0 : 0時点の現金

$v_1^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金

$$\text{Minimize } \frac{1}{T} \sum_{i=1}^I q^{(i)}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^n x_{j0} + v_0 = W_0$$

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^n (1 + \mu_{j1}^{(i)}) x_{j0} + (1 + r_0) v_0 \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^n (1 + \mu_{jt}^{(i)}) x_{j,t-1} + (1 + r_{t-1}) v_{t-1} \quad (t = 2, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G \quad (i = 1, \dots, I)$$

$$x_{jt} \geq 0 \quad (j = 1, \dots, n; t = 0, \dots, T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq 0 \quad (t = 0, \dots, T-1; i = 1, \dots, I)$$

表 1: 実験結果

$$q^{(i)} \geq 0 \quad (i = 1, \dots, I)$$

4 数値実験

4.1 設定条件

期間：3期間

シミュレーション経路：20経路

対象資産：3業種(電気・ガス業、情報通信業・サービス業)

初期富：1000000

計画期末の目標富：1000000

各業種に対するデータの基本統計量を用いてシミュレーション経路を生成する。

各業種に20万以上50万以下という制約をつける。

4.1.1 シミュレーション経路の生成方法

資産 j の期間 t の収益率は期待値 $\bar{\mu}_{jt}$ 、標準偏差 σ_{jt} の正規分布に従う。また ε_{jt} を正規分布に従う確率変数とする。正規乱数 $\varepsilon_{jt}^{(i)}$ を用いて、シミュレーション経路 i の資産 j の期間 t の収益率 $\mu_{jt}^{(i)}$ を以下のように生成する。

$$\mu_{jt}^{(i)} = \bar{\mu}_{jt} + \sigma_{jt} \varepsilon_{jt}^{(i)}$$

4.1.2 目標富との不足分の最小化

投資額モデルによって問題を解き、最適解を得る。

各期間におけるそれぞれの経路の投資額の平均が最適な投資額となる。

4.1.3 EXCELのプログラム

- ・各業種、各期間において期待値、標準偏差を求める。
- ・各業種、各期間において20個のシミュレーション経路の収益率を求める。
- ・各時点での富が最大となるようなセルを設定する。
- ・各業種への投資額を20万円以上50万円以下という制約にする。
- ・期間0での3資産の和は初期富とする。
- ・期間1での3資産の和は期間0での富の平均とする。
- ・期間2での3資産の和は期間1での富の平均とする。
- ・目標富-最終富で目標富に対する不足分の平均をとる。
- ・各業種、各期間における最適投資額を得る。

4.2 実験結果

表1のような最終時点における最終富と目標富の差とそれらの平均、各期間における最適投資額が得られた。

4.3 考察

各シミュレーション経路における最終富の目標富への不足分の最小化をおこなう最適投資額がそれぞれの表のように得られ、初期富1000000円で期待できる利益はおよそ11000円という結果が得られた。

また、実際の株価の上昇を受けて最終富の期待値が高い結果を得た。

シミュレーション経路	最終富	目標富-最終富
1	1012250.36	-12250.36019
2	1014062.66	-14062.65958
3	1008859.098	-8859.097507
4	1012015.172	-12015.17223
5	1010609.011	-10609.01065
6	1010561.526	-10561.52578
7	1008414.351	-8414.351249
8	1011904.833	-11904.83285
9	1009481.372	-9481.372127
10	1012934.375	-12934.37473
11	1009431.811	-9431.810968
12	1009979.505	-9979.504984
13	1010516.445	-10516.44453
14	1010880.743	-10880.74261
15	1011607.748	-11607.74842
16	1008459.931	-8459.930942
17	1010517.661	-10517.66131
18	1011885.068	-11885.06783
19	1010207.934	-10207.93353
20	1010998.337	-10998.33739
平均	1010778.897	-10778.89697

5 おわりに

実際の数値を用いて計算したので、教科書などの演習問題だけでなく現実的な研究となった。しかしまだ現金、債券、社債などを考慮して実験を行った場合も考えることが課題と反省点である。時期、季節によって業界での株価の影響もあるため、今回このような結果を得たがもっと考慮すべきことはあり、モデルを使った計算ができたが、様々なケースを考えて実験をする必要があったのではないかと考える。株式を考えるうえで考慮しなければならない事項は数知れずあるため、さらなる株価に対する知識を深め、これから実用的なプログラムを考えていきたい。

謝辞

本研究を進めるにあたり、御指導いただいた國田教授をはじめ学部生の方々に深く感謝します。

参考文献

- [1] 枇々木規雄：金融工学と最適化，朝倉書店(2001)
- [2] 東京証券取引所：株価指数ヒストリカルグラフ，
<http://quote.tse.or.jp/tse/quote.cgi?Fhstidx/histsearch>
- [3] 三宅 史彦：資産の効用的運用，2005