最適資産配分問題について
最適ポートフォリオ

2003MM022 飯田 健太
指導教員: 國田 寛

1　はじめに

投資家がどの投資対象にどれだけ投資したらよいかという問題をポートフォリオ選択問題という。ポートフォリオ選択は投資家の満足度を最大にするように行われる。ポートフォリオ選択問題を実際に解くために最もよく使われている平均・分散モデルについて説明する。さらに市場インデックスのみを要因にしてリターンの生成プロセスを記述するシングルインデックスモデルを取り上げ、そのインデックスモデルのポートフォリオ選択への利用について説明する。

2　平均・分散モデル

2.1　平均・分散モデルとポートフォリオ問題

資産家が効用関数を同定することができれば、期待効用最大化の原理に基づき、ポートフォリオを選択することができる。しかし、一般的に投資家の効用関数を同定することは難しい。そこで、リスク(分散、もしくは標準偏差)とリターン(期待収益率)のトレードオフを考えることによって、ポートフォリオ選択問題を考える。

投資家が効用関数を同定できないときは、この接点を求めることができないので、効用関数の代わりに投資家が要求する期待収益率を決めることによって、最適ポートフォリオを求める。その場合、「要求される期待収益率のもとで、リスクを最小化する」数理計画問題を解くことによって最適ポートフォリオを求めることができる。具体的には、「ポートフォリオの期待収益率$\bar{r}_p$が要求期待収益率r_E以上のもとで、分散$Var(R)$を最小化する」問題として、定式化することができる。

2.2　定式化

$$
\begin{aligned}
&Minimize \qquad Var(R) \equiv \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_j x_k \\
&subject\ to \qquad \bar{r}_p \geq r_E, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
&\qquad x_j \geq 0 \quad (j = 1, ..., n), \quad x \in X
\end{aligned}
$$

ここで、

n：資産(証券)数
σ_{jk}：資産(証券)jと資産(証券)kの共分散
x_j：資産(証券)jの投資比率。$x = (x_1, ..., x_n)^T$
r_E：資産家の要求期待収益率。
$\bar{r}_j$：資産(証券)jの期待収益率。
$\bar{r}_p$：ポートフォリオの期待収益率。$\bar{r}_p = \sum_{j=1}^{n}\bar{r}_j x_j$である。この問題を解くことによって最適な投資比率$x*$を求める。

これが「平均・分散モデル」と呼ばれるタイプのモデルである。

2.3　離散データを使った場合の定式化

離散データを用いて平均・分散モデルによって問題を解く場合の定式化の方法を示す。以降、事象tの起こる確率p_tは$\frac{1}{T}$とする。そのとき、σ_{jt}はr_{jt}を用いて、

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_{jt} - \bar{r}_j)(r_{kt} - \bar{r}_k) \tag{1}$$

と表すことができる。このσ_{jk}を用いてポートフォリオの分散$Var(R)$は、

$$Var(R) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}x_j x_k \tag{2}$$

と計算することができる。平均・分散モデルは、(2)式を直接用いて問題を解くことができるが別の形式によるモデルの表現を考えてみる。(1)式を(2) 式に代入すると、

$$Var(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(\sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j - \bar{r}_p)^2 \tag{3}$$

と計算できる。$y_t = \sum_{j=1}^{n} r_{jt}x_j - \bar{r}_p$とおくことにより、

$$Var(R) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2 \tag{4}$$

を得る。したがって平均・分散モデルは次のように定式化できる。

$$
\begin{aligned}
&Minimize \quad \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_t^2 \\
&subject\ to \quad \sum_{j=1}^{n} r_{jt}\ x_j - y_t = \bar{r}_p \qquad (t = 1, ..., T) \\
&\qquad \bar{r}_p \ \geq r_E, \quad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \\
&\qquad x_j \ \geq 0 \quad (j = 1, ..., n), \quad x \in X
\end{aligned}
$$

この形式はコンパクト分解表現による定式化と呼ばれていて、特に大規模な平均・分散モデルを解く上で以下のような利点がある。

・資産間の共分散σ_{jk}を計算する必要がない。

・変数の数はT個と多くなるが目的関数はT個の変数の二乗和という取り扱いやすい形になるため、様々な効率的な解法を工夫できる。

3　インデックス・モデルとポートフォリオ選択

インデックス・モデルとは、ある証券のリターン生成プロセスを記述するためのモデルで、1つのインデックスによって記述するモデルをシングル・インデックスモデルという。インデックス・モデルは相関係数行列の計算を簡単化するためのモデルとして登場した。

なぜシングル・インデックス・モデルが必要とされるのか。それは次のような特長を持つためである。

1. 推定(予測)すべき情報を大幅に削減できる
2. 実務への応用可能性が高い
3. βリスクの推定式である

3.1　シングル・インデックス・モデルの概要

シングル・インデックス・モデルは、(6)〜(8)式に示す構造や仮定のもとで、(5)式のように証券iの収益率R_iを1つの代表的な市場インデックスの収益率(市場収益率)R_mによって記述するモデルである。

基本式　$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + e_i \quad (i=1,....,N) \tag{5}$$

構造　$$E[e_i] = 0 \quad (i=1,....,N) \tag{6}$$

$$E[e_i(R_m - \bar{R}_m)] = 0 \quad (i=1,....,N) \tag{7}$$

仮定　$$E[e_i e_j] = 0 \quad (i=1,....,N; j=1,....N; i \neq j) \tag{8}$$

ここで、

β_i：R_mの変化に対する証券iの収益率R_iの期待変化率(ベータ：感度指標)

α_i：市場とは独立な証券iの個別収益率の期待値(アルファ)

e_i：市場とは独立な証券iの個別収益率のランダム項

N：証券数

である。(6)式はランダム項の期待値が0、(7)式はランダム項と市場インデックスの相関係数(共分散)が0、(8)式は異なる証券のランダム項の相関係数(共分散)が0であることを表す。

次に、シングル・インデックス・モデルを用いた場合の期待収益率、分散、共分散を以下に示す。ここで、証券iのランダム項e_iの分散をσ_{ei}^2、市場収益率の分散をσ_m^2とする。

1)期待収益率：$\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m$

証券iの期待収益率は、証券iの固有なリターンα_iと市場に関連したリターン$\beta_i\ \bar{R}_m$に分けられる。

2)分散：$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2$

証券iの収益率の分散は、証券iに固有なリスクσ_{ei}^2と市場に関連したリスク$\beta_i^2 \sigma_m^2$に分けられる。

3)共分散：$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2$

共分散は市場リスクにのみ依存している。

個々の証券の期待収益率、分散、共分散を用いることによって、次式のようにポートフォリオの期待収益率と分散を計算することができる。ポートフォリオ$(x_1, ..., x_i)$の収益率は$R_p = \sum_{i=1}^N x_i R_i$で与える。

1)期待収益率　$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^N x_i \bar{R}_i = \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i + \sum_{i=1}^N x_i \beta_i \bar{R}_m$$

2)分散　$$\bar{\sigma}_p^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2 \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^N x_i^2 \sigma_{ei}^2 \tag{9}$$

3.2　シングル・インデックス・モデルの特徴

(9)式よりポートフォリオのアルファα_pとベータβ_pを

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^N x_i \alpha_i, \qquad \beta_p = \sum_{i=1}^N x_i \beta_i$$

とすると、ポートフォリオの期待収益率は(10)式で表せる。

$$\bar{R}_p = \alpha_p + \beta_p \bar{R}_p \tag{10}$$

$\alpha_p = 0$、$\beta_p = 1$のとき、ポートフォリオPの期待収益率は市場ポートフォリオの期待収益率と一致する($\bar{R}_p = \bar{R}_p$)。一方、ポートフォリオの分散(9)式はβ_pを用いると、(11)式のように書き直すことができる。

$$\sigma_p^2 = \beta_p^2 \sigma_m^2 = (\sum_{i=1}^N x_i \beta_i)^2 \sigma_m^2 \tag{11}$$

十分に大きなポートフォリオでは、個別のリスクσ_{ei}の影響がなくなり、β_iはσ_p^2への貢献度(影響度)を測る尺度と考えられる。これらのことから、ある証券または証券ポートフォリオのベータが1より大きい(小さい)場合には、市場よりも危険である(ない)と評価することができる。

3.3　数値計算

ポートフォリオ最適化問題の応用として、インデックスモデルを使った$Elton$ の簡易最適化法を用いて、4つの資産(アサヒビール、松下電工、近畿日本鉄道、三菱電機)をとり、最適ポートフォリオの計算を行った。最適投資比率は次表のようになった。

銘柄	投資比率
アサヒビール	44.4%
松下電工	30.7%
近畿日本鉄道	24.9%
三菱電機	0.0%

4　おわりに

ポートフォリオ選択問題を解くための2つのモデルについて研究した。特にインデックスモデルを使用した数値計算を行うことによって、現在の株価と終値さえ考えれば、簡単に投資比率を割り出すことができた。今後、社会人になるにあたって、もっと株の計算に詳しくなれればと思う。

参考文献

[1] 枇々木規雄：金融工学と最適化, 朝倉書店(2001)

[2] 安達智彦、安藤進：現代のポートフォリオ・マネジメント, 同文館 (1992).

[3] 沢木勝茂：ファイナンスの数理, 朝倉書店 (1994).