経路依存型オプションについて

2003MM016 早川貴明

指導教員: 國田 寛

1　研究について

経路依存型オプションと言われてもそれだけでは分かりにくいものがある。よって、まず最初に通常のオプションについて説明した上で経路依存型オプションの特徴を１つずつあげていくことにする。

2　オプションの基礎知識

まず、オプションには買う権利と売る権利のふたつがある。これはそれぞれコールオプションとプットオプションと呼ばれる。この呼び方は他のオプションでも同様の意味で使う。
そして、満期時点において行使価格をもって買うか売るかを決める権利を有する。これが一番単純なオプションである。これに対しそこに至るまでの経路にも注視するのが経路依存型オプション、そして期間内の平均を使うのがアジアンオプションである。

2.1　使用する変数

1. V： オプション価値。コールとプットの区別が必要な場合はCやPになることもある。2変数の場合Sとtの関数と見なされるのでV(S、t)を意味する。3変数の場合V(S、I、t)を意味する。
2. S：原資産。$S(t)$を意味する。
3. I：資産の時間平均。
4. t：時間を表す変数。とくに満期時点をTと置く。
5. σ：原資産のランダムを表すボラティリティ。
6. r ：利子率。

3　オプション価格の偏微分方程式

通常のオプションを計算する際その解析解を用いるためBlack-Scholes方程式の手法をもちいる。これはヨーロピアンオプションなどの２変数問題にはとても有効だが、アジアンオプションなどの３変数問題にはあまり有効ではない。よって、従来の2つの変数に加えて、経路に依存する第3の変数Iを用いる。このIの取り方によって最終的な値が違ってくるのが興味深いところである。なお、オプション価格はV(S、t)、3変数の場合V(S、I、t)で表す。

3.1　確率微分方程式

資産価格S(t)、$0 \le t \le T$は次の確率微分方程式で決まるとする

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \sigma dX(t) + \mu dt.$$

IはS(t)の平均であるが、算術平均でも離散平均でもよい。Iをどのように求めるかで変わってしまうのもアジアンオプションの特徴である。伊藤の補題を用いるためIに関する確率微分方程式が必要である。それは以下の様になる。

$$I = \int_0^t f(S(\tau),\tau)d\tau.$$

$$dI = f(S,t)dt.$$

Iに関する確率微分方程式が分かったので伊藤の補題がV(S、I、t)に適用できる。その結果以下のようになる。

$$\frac{\partial V}{\partial t} + f(S,t)\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rv = 0$$

Iに関する項が１つ増えた以外は基本的なBlack-Scholes方程式と同じである。Iが違っても計算過程は同じなので適宜$f(S,t)$にあてはめ用いる。

4　類似性による階数降下について

3変数なので計算に時間を要し、解を数値的に求めねばならないのがアジアンオプションの特徴の１つである。が、３変数の問題を２変数に近似する手法が存在する。

4.1　算術平均の場合

ある定数α-たいてい0か1が用いられる-を用いてペイオフが$S^\alpha F(\frac{I}{S},t)$のように書けるなら、変換出来る。その際の偏微分方程式は以下の様になる。

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 + (\sigma^2(1-\alpha) - r)R)\frac{\partial H}{\partial R} - A = 0.$$

$$但し \quad A = (1-\alpha)(\frac{1}{2}\sigma^2\alpha + r)H.$$

2変数に近似できたことで計算がBlack-Scholesと比べて容易になるかというとそうではない。解析解を導出する方法なのだが、この解は特殊関数の合流型超幾何関数

$$F(\alpha,\gamma;z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{\gamma(\gamma+1)..(\gamma+n-1)}\frac{z^n}{n!}$$

$$\alpha = -1, \quad \gamma = -\frac{\sigma^2}{2}(\sigma^2+1), \quad z = \frac{2}{\sigma^2}\frac{I}{S}$$

の無限和となり、大変時間がかかる。

4.2　幾何平均の場合

$$G(t) = \exp(\frac{1}{t}\int_0^t \log S(\tau)d\tau).$$

であるならば、必要な偏微分方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{t}G\log S\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rv = 0.$$

終端条件$V(S,G,T) = \max(S-G,0)$とする。$y = t\log\frac{S}{G} \quad W(y,t) = \frac{V(S,G,t)}{S}$とおき、それによって変数変換する。その結果偏微分方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - (r + \frac{\sigma^2}{2})t\frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

となる。ここから解析解を求めることが出来る。

5　実際使うにあたり

アベレージストライクオプションとアベレージレートオプションがアジアンオプションの主要な例である。もうひとつ、離散サンプリングの場合がある。これは連続サンプリングとはまた別のアプローチ方法が必要になる。後に数値計算するのに使う算術平均のアベレージストライクオプションの求め方と離散サンプリングの求め方を記す。

5.1　算術平均のアベレージストライクオプション

算術平均によるIは

$$I = \int_0^t S(\tau) d\tau.$$

で表される。この際オプションの偏微分方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial t} + S\frac{\partial V}{\partial I} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

で表される。これに類似性による階数降下を用いて、$\alpha = 1$を代入し

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 R^2 \frac{\partial^2 H}{\partial R^2} + (1 - rR)\frac{\partial H}{\partial R} = 0.$$

を得る。この時t＝Tでの終端条件は

$$H(R,T) = S\max(1 - \frac{R}{T}, 0)$$

境界条件

$$R = 0 \text{のとき} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial R} = 0$$

$$R \to \infty \quad \text{のとき} \quad H \to 0$$

となる。

5.2　離散サンプリング

実際問題、現実の資産変動を完全に連続変数としてあつかうことはまず不可能である。よって、離散サンプリングを扱うわけだが、その際はこれまでのようにIは積分でなく期間中の有限回数観察された数値の和として扱うことになる。離散サンプリング時の算術平均は

$$I = \sum_{i=1}^{j(t)} S(t_i).$$

となる。これは不連続になってしまう。その理由としてはサンプリングがなされた前後でIとI+Sの逐次総和の改訂がなされるからである。だが、サンプリング時点をはさんで実際のオプション価値は連続でなくてはならない。よって離散サンプリングの算術平均アベレージストライクオプションに対して

$$V(S, I, t_i^-) = V(S, I + S, t_i^+).$$

幾何平均の場合も算術平均と同じようになる。ヨーロピアンオプションは現時点の価格と行使価格を比較して行使するか否かを決める。それに対しアベレージストライクは行使価格と比較するのに資産価格の時間平均Iを用いる。離散サンプリングの価格づけは以下の様になる。
満期時点(最終サンプル時点でもある)からその前のサンプル時点の間で

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0.$$

を解く。これにより直前のサンプル時点までの価格公式が決まる。
次に対象となる現在のサンプル時点に跳躍条件を適用してサンプル時点の直前のオプション価値を求める。
以上を必要なだけくり返し初期時点－最初のサンプル地点－まで逐次的に価格公式を求める。

6　実際数値を計算

アジアンオプションの価値を陽的差分法を用いて計算するプログラムを使ってさまざまに条件を変えて価格の変動を見る。どのような条件で増えるか減るか、それを見てみたい。この表は原資産のグリッド数N=100、時間のグリッドの分割数M=1000で計った時間0地点でのアベレージストライクコールの価格である。

$\sigma \setminus$ r	r=0.05	r=0.1	r=0.2
$\sigma = 0.1$	0.056241	0.070226	0.102680
$\sigma = 0.2$	0.070046	0.083122	0.112564
$\sigma = 0.3$	0.086284	0.098565	0.125535

一般的に単純なヨーロピアンオプションと比べるとアジアンオプションの価格は安くなる。これは、アジアンが利益を目的としたオプションでないことを示す。そして、rとσが大きくなればなるほど価格は高くなるのはヨーロピアンもアジアンも変わらないオプション自体の性質と言えるのだが、ヨーロピアンの変化はなまじ価格が高いだけに上記のアジアンの比ではなく、もっと激しく変動する。ここから、アジアンオプションは変動に強い性質をもっているオプションといえる。

謝辞

本研究をするにあたり御指導いただいた國田教授始め、励まし合って進めてきた方々に深く感謝致します。

参考文献

[1] Paul Wilmott,Sam Howison,Jeff Dewynee 著: 伊藤幹夫 戸瀬信之 訳,
デリバティブの数学入門；共立出版 2002年

[2] 一松 信 著: 解析学序説 上巻 下巻, 裳華房