偏微分方程式の差分解法(解の安定条件)

2001MM030 兼松 貴浩

指導教員　國田 寛

1　はじめに

連続媒質内の場，例えば電場，磁場，弾性体のひずみ，応力の場，流体の速度，圧力，温度の場など支配する法則は，偏微分方程式の形に書き表される．またファイナンスの理論では，オプションの価格は偏微分方程式を解くことによって求められる．これらの方程式を解析的に解くことができるなら，それ以上のことはないが，このような問題は現実に解くことは難しく，'数値解法'の方が問題を一般的に扱うことができる．

本研究では，多々ある数値解法のなかで'差分法'を取り上げて研究していく．

2　差分法

差分法というのは，まず，連続的な広がりをもつ独立変数の変域内に，交わる縦横の直線群を考えて，独立変数の変域をそれらの直線群の交点(格子点)の上だけに限ってしまい，偏微分方程式の中に現れる微分商をすべて，格子点上の関数値を用いて表した差分商に置き換え，差分方程式に変える．その差分方程式を解くことにより，もとの微分方程式の解の近似値を得ようというものである．

2.1　偏微分方程式

空間変数xと時間変数tの関数$u = u(x,t)$に対応する偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

を差分法で解くことを考える．(x,t)面における(1)の解$u(x,t)$の格子点$x = x_j = j\Delta x$，$t = t_n = n\Delta t$における値$u(x_j,t_n)$に対応する近似値をu_j^nとする．

2.2　差分近似

時間tに関する差分近似

$$\text{前進差分} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$$

$$\text{後退差分} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}$$

xに関する差分近似

$$\text{前進差分} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x}$$

$$\text{後退差分} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

$$\text{中心差分} \qquad \frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}$$

xに関する２階の偏微分$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$の中心差分

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

2.3　陽解法(陽の差分方程式)

この手法では格子点における偏微分方程式の差分近似の方法として$\frac{\partial u}{\partial x}$と$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$については中心差分を，$\frac{\partial u}{\partial t}$については後退差分をもちいる．(1)にこれらを代入し変形すると次のようになる．

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \tag{2}$$

2.4　陰解法(陰の差分方程式)

格子点における偏微分方程式の差分近似の方法として$\frac{\partial u}{\partial x}$と$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$には中心差分を，$\frac{\partial u}{\partial t}$には前進差分をもちいる．そして2.3と同様に(1)にこれらを代入し変形するとつぎのようになる．

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) \tag{3}$$

3　安定条件

3.1　適合性

差分法を用いて(1)を解くことを考える．そのために(1)の解$u(x,t)$の，近似値u_j^nに対して次の差分方程式を作る．

$$u_j^{n+1} = K(\Delta x, \Delta t)u_j^n \tag{4}$$

ここで，差分方程式がもとの微分方程式の正しい近似になっているという性質を次のように表すとする．

"格子間隔$\Delta x, \Delta t$を0に近づけるとき，両者の間に$\Delta x = h(\Delta t)$という関係式を設定したとする．このとき，微分方程式(1)の解$u(x,t)$に対して

$$u(x, t+\Delta t) - K(h(\Delta t), \Delta t)u(x,t) = o(\Delta t)$$

という関係が成り立つならば，差分間隔の間に$\Delta x = h(\Delta t)$という関係を設定した差分方程式

$$u^{n+1} = K(h(\Delta t), \Delta t)u^n$$

は，微分方程式(1)に「適合」している"という．

3.2　差分スキーム

差分法とは，差分間隔を限りなく小さくしていき，それによって計算の精度をあげていくことを目的とした数値解法である．差分間隔をどんどん小さくしていき，随時差分方程式を解いていったとする．それらの結果から収束して行く方向がわかれば数値的にはその偏微分方程式の解が判明した，ということと同義となる．しかしそのときのΔx，Δtを互いに独立に選び，それぞれを小さくしていったとすると，状況が複雑になりすぎて，はっきりした見通しが得られなくなる．そこで，ΔxとΔtに，例えば$\Delta x = h(\Delta t)$のようにΔxをΔtの関数にしてしまえば，tのみの関数と考えることもできるため，計算時間の短縮にもつながり，また収束方向の考察も容易となる．このような関係を設定したうえで差分間隔を0に近づけていくときに出てくる一連の差分方程式を一括して考察するとき，これを差分スキームと呼ぶ．

3.3　ラックスの同等定理とノイマン条件

差分演算子Kのn乗(K^n)のノルム$||K^n||$に対して，

$$||K^n|| \leqq C$$

となるような正の定数Cが存在する場合，Kは安定であるという．

ラックスの同等定理

“差分スキーム$u^{n+1} = Ku^n$が$\Delta t \to 0$の時，偏微分方程式の解に収束するための必要十分条件は差分演算子Kが安定であることである”

差分方程式を解いて導いた解が意味のあるものであるためには，差分スキームとして安定のものを使う必要がある．しかし，ラックスの同等定理は実用的でないため具体的な形に変形する必要がある．そのために，解をフーリエ級数に展開して，各フーリエ成分について個別に調べることにする．

方程式(1)の境界条件が$u(0,t) = u(1,t) = 0$の場合，差分方程式(4)について考える．(4)は波数ξの正弦波を表す次の形の特解を持っている．

$$u_j^n = g^n \exp(i\xi j\Delta x) \qquad i = \sqrt{-1} \tag{5}$$

ここでのgは一般的に$\Delta x, \Delta t$を含む数である．g^nは普通の意味でのgのn乗を表す．またgをKの増幅率と呼ぶ．gを適当に選び(4)に代入し，計算すると

$$g = \sum_k c_k \exp(i\xi k\Delta x)$$

を得る．gをこのように選んでおけば，(5)が(4)の解となることがわかる．ここで，差分間隔の間に$\Delta x = h(\Delta t)$という関係を設定した差分スキームが安定であるための条件は

$$|g| \leqq 1 + L\Delta t \qquad (\Longleftrightarrow |g(\Delta t)| \leqq 1 + L\Delta t\ )$$

この不等式を満たす定数Lが存在することである．この不等式をフォン・ノイマンの条件という．この不等式はラックスの同等定理の差分スキームの安定性を保証する重要かつ便利な条件式である．

3.4　陽の差分方程式

まず陽の差分方程式(2)について考えるとき

$$g = 1 - 4\rho\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right), \quad \rho = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

となる．この式のフォン・ノイマンの条件は

$$-1 - L\Delta t \leqq 1 - 4\rho\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \leqq 1 + L\Delta t$$

となり，この不等式より安定条件は

$$\rho \leqq \frac{1}{2}$$

これが陽の差分方程式についての安定条件である．

3.5　陰の差分方程式

次に，陰の差分方程式(3)を考えるとき

$$g = \frac{1}{1 + 4\rho\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right)} \tag{6}$$

となる．ここで$4\rho\sin^2\left(\frac{\xi\Delta x}{2}\right) \geqq 0$であるから$|g| \leqq 1$が成立することがわかる．つまりこの差分スキームは$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$がどんな値をとろうとも満たされる．このことから陰の差分方程式は無条件安定と言える．

3.6　行列の固有値を用いた安定条件

$(N \times N)$行列Bを考えるとき，Bの対角要素をすべて0とした行列の第r行の総和をP_rと書くとすると，Bのどの固有値λに対しても

$$|\lambda - b_{rr}| \leqq P_r \tag{7}$$

がいえる．

この定理を用いることにより，フーリエ解析の方法が適用できない問題の安定条件を求めることができる．

フーリエ解析の方法が適用できない例として，拡散方程式ではあるが，境界条件に導関数が含まれている場合について調べる．(1)において境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - \alpha u(0,t) = 0, \ \ u(1,t) = 0, \qquad (0 < x < 1)$$

が与えられた場合，上の定理(7)を用い，計算すると

$$|\lambda - (1 - 2\rho - 2\alpha\rho\Delta x)| \leqq 2\rho \tag{8}$$

$$|\lambda - (1 - 2\rho)| \leqq 2\rho \tag{9}$$

$$|\lambda - (1 - 2\rho)| \leqq \rho \tag{10}$$

の３式が得られる．この３式の中で$|\lambda|$が1を超えないためのρに対する条件の最も厳しいものは最初の(8)である．(8)を計算することにより

$$\rho \leqq \frac{1}{2 + \alpha\Delta x}$$

が導かれる．すなわちこの問題において，この不等式が$\rho =$ 定数のスキームに対する安定条件である．この条件は$\Delta x \to 0$の極限では$\rho \leqq \frac{1}{2}$となるが，現実にはΔxは0ではないため，$\rho = \frac{1}{2}$ととるのは危険である．したがって最終的な安定条件として

$$\rho < \frac{1}{2}$$

を考えるのが望ましい．

3.7　数値計算

陽解法のプログラムを作り，安定条件を満たす場合と満たさない場合で実行してみたところ安定性の差は明らかであった．

4　終わりに

本研究を行い，差分法についての理解を深め，安定条件がどのように作用するか，また安定条件の必要性を理解することができた．

謝辞

本研究を進めるにあたり指導をいただいた國田寛教授と関係諸氏の方々には深く感謝いたします．

参考文献

[1] 高見穎郎,河村哲也
偏微分方程式の差分解法
東京大学出版社(1994)

[2] 森平爽一郎，小島裕
コンピュテーショナルファイナンス
朝倉書店(1997)