ファイナンスへの計量分析
– 時系列データにおける ARMA モデルの精度 –

2000MM097 鵜飼幹人

指導教員　國田寛

1　はじめに

株、証券、為替などの不規則に動くデータがあります。そのような時系列データに対して過去の研究者はどのように取り組んだのか興味を持ちました。将来を予測するというのは、過去のデータの中から何かしらの規則性を見つけ出し、それが将来にも反映されるであろうという期待である。時系列解析ではまず初めに定常性という概念が出てくる。簡単に言うと過去が未来に反映されるのが定常であり、反映されないのが非定常である。データは定常なのか非定常なのかを探るのが一つの大きな問題であり、正確なモデルを選ぶための重要な岐路となる。本研究では時系列データとして為替レートを取り上げ、定常モデルである ARMA モデル、ARCH モデルを当てはめ、比較することによってデータの定常性、モデルの精度を調べてみることにしました。

2　定常過程

2.1　定常性

時系列データを $\{x_t\}$ とする。金融データの場合、$\{x_t\}$ はより広く定常過程であると仮定されることが多い。定常には弱定常と強定常がある。

$\{x_t\}$ が弱定常とは $E[x_t^2]$ が存在し、
(1) 平均が一定：すべての t に対して $E[x_t] = \mu$
(2) 分散が一定：すべての t に対して $Var(x_t) = \gamma(0)$
(3) 自己共分散が一定：すべての t および k に対して $\mathrm{Cov}(x_t, x_{t-k}) = \gamma(k)$ (t によらず一定)
となる確率過程を意味する。

強定常とはすべての t と h に対して $(x_1, \cdots, x_t)$ および $(x_{1+h}, \cdots, x_{t+h})$ が同一の同時分布をもつという条件が成り立つことをいう。

2.2　自己相関

k 次の自己共分散を分散で割った量

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}$$

を k 次の自己相関と呼ぶ。

3　自己回帰モデルと移動平均モデル

3.1　自己回帰モデル (AR モデル)

x_t を説明するために、自分自身の過去 (ラグ) を説明変数とする回帰モデル

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + u_t \qquad t = 1, 2, \cdots, T$$

を自己回帰モデルと呼び、AR(p) と記す。ここで、ϕ_i はパラメータである。また、誤差項 u_t は通常の回帰モデルと同様に
(U1) 平均が 0、分散 $\sigma^2\ (>0)$ であり、互いに無相関な系列
(U2) 各 t について u_t と x_{t-k} $(k = 1, 2, \cdots)$ は独立
という仮定を満たすものとする

特に仮定 (U1) を満たす確率変数列をホワイトノイズという。

AR(p) モデルの自己相関は

$$\begin{cases} \rho(1) = \phi_1 + \phi_2\rho(1) + \cdots + \phi_p\rho(p-1) \\ \rho(2) = \phi_1\rho(1) + \phi_2 + \cdots + \phi_p\rho(p-2) \\ \vdots \\ \rho(p) = \phi_1\rho(p-1) + \phi_2\rho(p-2) + \cdots + \phi_p \end{cases}$$

である。

3.2　移動平均モデル (MA モデル)

u_t がホワイトノイズであるとき

$$x_t = u_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i}$$

と表現されるモデルを移動平均モデルと呼び、MA(q) と書く。共分散、自己相関は

$$\gamma(k) = \sigma^2\theta_k + \sigma^2 \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{i+k}$$

$$\rho(k) = \frac{\theta_k + \sum_{i=1}^{q-k} \theta_i\theta_{i+k}}{1 + \theta_1^2 + \cdots + \theta_q^2} \qquad k = 1, 2, \cdots, q \text{ のとき}$$

$$\rho(k) = 0 \qquad k \geq q+1 \text{ のとき}$$

となる。

4　ARMA モデル

AR(p) と MA(q) を組み合わせた

$$x_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i x_{t-i} + u_t + \sum_{i=1}^{q} \theta_i u_{t-i}$$

を ARMA モデルと呼び、ARMA(p,q) と書く。u_t はホワイトノイズである。
簡素な形で書くと

$$\phi(B)x_t = \theta(B)u_t$$

となる。ここで $\phi(B)$、$\theta(B)$ はそれぞれ p 次と q 次の多項式

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \cdots - \phi_p B^p$$
$$\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \cdots + \theta_q B^q$$

である。$\theta(B) \equiv 1$ であれば p 次の自己回帰モデル (AR(p)) であり、$\phi(B) \equiv 1$ であれば q 次の移動平均モデル (MA(q)) である。

定理・存在と一意性

ARMA(p,q) の定常解 $\{x_t\}$ が存在する (しかも唯一の定常解である) ための必要十分条件は

すべての $|z|=1$ について $\phi(z)=1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p \neq 0$

となることである。

x_t が現在と過去の $u_s,s \le t$ により表されるとき $\{x_t\}$ を因果的であるという。

定理・因果性

$\{x_t\}$ が因果的であることは

すべての $|z| \le 1$ について $\phi(z)=1-\phi_1 z-\cdots-\phi_p z^p \neq 0$

という条件と同値である。

u_s が現在と過去の $x_s,s \le t$ により表されるとき、反転可能であるという。

定理・反転可能性

$\{u_t\}$ が反転可能であることは

すべての $|z| \le 1$ について $\theta(z)=1+\theta_1 z+\cdots+\theta_q z^q \neq 0$

という条件と同値である。

5 ARMA 過程の自己相関関数

自己共分散は

$$\gamma(h)=\alpha_1\xi_1^{-h}+\alpha_2\xi_2^{-h}+\cdots+\alpha_p\xi_p^{-h}, \quad h \ge m-p$$

という形になる。ここで $\xi_1,\cdots,\xi_p$ は式 $\phi(z)=0$ の (異なると仮定される) 根であり、$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ は任意の定数である。

6 ARMA モデルの推定と同定

6.1 ユール・ウォーカー推定

ユール・ウォーカー法は AR(p) モデルに適用される。パラメータ $\phi=(\phi_1,\cdots,\phi_p)$ と分散 σ^2 の推定値はそれぞれ

$$\hat{\phi}=(\hat{\phi}_1,\cdots,\hat{\phi}_p)'=\hat{R}_p^{-1}\hat{\rho}_p,$$
$$\hat{\sigma}^2=\hat{\gamma}(0)[1-\hat{\rho}_p'\hat{R}_p^{-1}\hat{\rho}_p],$$

となる。ただし

$$\hat{\rho}_p=(\hat{\rho}(1),\cdots,\hat{\rho}(p))'=\hat{\gamma}_p/\hat{\gamma}(0),\ \hat{R}_p=\frac{1}{\rho(0)}\hat{\Gamma}_p$$

とする。

6.2 最尤推定

モデルが θ をパラメータとしている場合には、対数尤度 l、尤度 L はパラメータ θ の関数と考えることができ、このとき

$$l(\theta)=\begin{cases} \sum_{n=1}^{N}\log f(y_n|\theta) & \text{独立の場合} \\ \log f(y_1,\cdots,y_N|\theta) & \text{一般の場合} \end{cases}$$

$$L(\theta)=\begin{cases} \prod_{n=1}^{N} f(y_n|\theta) & \text{独立の場合} \\ f(y_1,\cdots,y_N|\theta) & \text{一般の場合} \end{cases}$$

を対数尤度関数および尤度関数と呼び、この $l(\theta)$ および $L(\theta)$ を最大とする θ を選ぶ。

6.3 次数選択

AICC 基準：

ARMA(p,q) モデルにおいて

$$AICC=-2l(\hat{\theta})+2(p+q+1)n/(n-p-q-2)$$

を最小化する p と q の値を選ぶ。

7 条件付き分散と ARCH モデル

ARCH モデルとは

$$x_t=\mu+u_t$$

と表されるモデルであり、$\mu=E[x_t]$ とする。u_t は

$$u_t=\sigma_t\epsilon_t$$

と表される積過程である。$\{\epsilon_t\}$ は互いに独立に平均 0、分散 1 の同一分布に従う確率変数列、σ_t^2 は

$$\sigma_t^2=\alpha_0+\alpha_1 u_{t-1}^2+\cdots+\alpha_p u_{t-p}^2$$

とし、ARCH(p) と記す。ここで $\alpha_0,\cdots,\alpha_p$ はパラメータである。

8 為替レートへの応用

実際の時系列データに AR、ARMA、ARCH モデルを当てはめてみる。データは対ドル円レート (1996.1〜2005.12 の月平均) を使う。(2006.1〜2006.12 のデータはモデルの予測値と照らし合わせるために使う) 計算ソフトは ITSM2000 を使い、同定には AICC 法を使う。AR モデルとして AICC 法を適用すると次数 $p=1$ が最適モデルであり、ARMA モデルとして適用すると、$p=3, q=2$ が最適であることがわかった。次に次数を上げると過去のデータに対して残差分散の小さなモデルができることがわかったが、未来の予測は逆に不正確となることがわかった。モデル間の精度の違いは ARCH > AR > ARMA の順に予測値と実際の値との残差分散が小さくなり為替レートには ARMA モデルが有効であるということがわかった。

謝辞

本研究を進めるにあたり、2 年間熱心に御指導くださった國田寛教授に心から感謝致します。

参考文献

[1] 小暮厚之:ファイナンスへの計量分析, 朝倉書店 (1996).

[2] 北川源四郎：時系列解析入門, 岩波書店、(2005).

[3] P・J・ブロックウェル、R・A・デービス：時系列解析と予測, シーエーピー出版株式会社 (2004).

[4] 阪井章：応用解析 複素解析/フーリエ解析, 共立出版株式会社 (1992).