# 直観主義論理LJのcut除去定理の証明

2003MM124 山崎 恭裕
指導教員: 佐々木 克巳

## 1 はじめに

本研究では、小野[1]と松本[2]を参考にして、直観主義論理のcut除去定理の証明を理解する。ただし、この要旨では、第４章にて、証明の一部を行うことにする。

## 2 直観主義論理の体系LJ

1. 項と論理式は次のように定義される。
   - 対象定数と自由変数は項である。
   - 命題変数は論理式である。
   - $t_1, \cdots, t_n$が項で、$P$が$n$変数の述語記号のとき、$P(t_1, \cdots, t_n)$は論理式である。
   - $A, B$が論理式のとき、$(\neg A), (A \wedge B), (A \vee B)$, $(A \supset B)$は論理式である。
   - $F(a)$が論理式で、$a$が自由変数のとき、$\forall x F(x)$, $\exists x F(x)$は論理式である。
2. LJにおける式は次の形で表現される。
   $$A_1, \cdots, A_m \to \theta$$
   $A_i$は論理式、$\theta$は空か一つの論理式を表す。
   LJの式の右辺には、「二つ以上の論理式をもたない」という制限がある。また、この式は、「仮定$A_1, \cdots, A_m$が全て成立するとき、$\theta$が成立する。」を表す。
   $\boxed{\text{公理}}$ $A$が任意の論理式のとき、$A \to A$の形の式が始式である。
3. LJには、次の式の構造と論理記号に関する推論規則が、それぞれ５個と１２個ある。これらにおいて、$\Gamma$と$\Sigma$は論理式の列，$\theta$は空か一つの論理式を表す。
   推論規則の上式と下式で、数・順・形が不変の論理式をパラメーター，不変でない下式の論理式を主論理式，上式の論理式を副論理式という。
   $$\frac{\Gamma \to \theta}{A, \Gamma \to \theta}(w\text{左}) \quad \frac{\Gamma \to}{\Gamma \to A}(w\text{右})$$
   $$\frac{A, A, \Gamma \to \theta}{A, \Gamma \to \theta}(c\text{左}) \quad \frac{\Gamma, B, A, \Sigma \to \theta}{\Gamma, A, B, \Sigma \to \theta}(e\text{左})$$
   $$\frac{\Gamma \to A \quad A, \Sigma \to \theta}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(cut)$$
   $$\frac{\Gamma \to A}{\neg A, \Gamma \to}(\neg\text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \to}{\Gamma \to \neg A}(\neg\text{右})$$
   $$\frac{A_i, \Gamma \to \theta}{A_1 \wedge A_2, \Gamma \to \theta}(\wedge\text{左}) \quad \frac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \wedge B}(\wedge\text{右})$$
   $$\frac{A, \Gamma \to \theta \quad B, \Gamma \to \theta}{A \vee B, \Gamma \to \theta}(\vee\text{左}) \quad \frac{\Gamma \to A_i}{\Gamma \to A_1 \vee A_2}(\vee\text{右})$$
   $$\frac{\Gamma \to A \quad B, \Sigma \to \theta}{A \supset B, \Gamma, \Sigma \to \theta}(\supset\text{左}) \quad \frac{A, \Gamma \to B}{\Gamma \to A \supset B}(\supset\text{右})$$
   $$\frac{F(t), \Gamma \to \theta}{\forall x F(x), \Gamma \to \theta}(\forall\text{左}) \quad \frac{\Gamma \to F(a)}{\Gamma \to \forall x F(x)}(\forall\text{右})$$
   $$\frac{F(a), \Gamma \to \theta}{\exists x F(x), \Gamma \to \theta}(\exists\text{左}) \quad \frac{\Gamma \to F(t)}{\Gamma \to \exists x F(x)}(\exists\text{右})$$
   「$\forall$左」と「$\exists$右」における$t$は任意の項であり、「$\forall$右」と「$\exists$左」における$a$は下式のどの論理式にも現れない自由変数である。
4. LJの証明図は次のように帰納的に定義される。
   - 始式のみでもLJの証明図であり、その終式は始式自身である。
   - 式$S_1, S_2$を終式とするLJの証明図がそれぞれ$P_1, P_2$のとき、$\frac{S_1}{S}, \frac{S_1 \quad S_2}{S}$がLJの推論規則ならば、$\frac{P_1}{S}, \frac{P_1 \quad P_2}{S}$はLJの証明図であり、その終式は$S$である。

## 3 LJのcut除去定理とその証明の準備

$\boxed{\text{定理}}$（LJのcut除去定理）　式$\Gamma \to \theta$がLJで証明可能ならば、推論規則cutが一度も使われない式$\Gamma \to \theta$の証明図が存在する。

この章では、上の定理を証明するための準備を行う。また、推論規則Ｉを幾度か行うことを、(Ｉ')と表す。

まず、下の推論規則mix(cutの拡張)を導入する。

$$\frac{\Gamma \to m \quad \Sigma^+ \to \theta}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(m)$$

'$m$'はm-論理式といい、それにあたる論理式を、右端の括弧内に当てはめる。'$\Sigma^+$'は一つ以上のm-論理式を含んでいる論理式の列，'$\Sigma$'は$\Sigma^+$からm-論理式を全て取り去った論理式の列を表す。

cutはmixを，mixはcutを用いて、互いに表現することができる。よって、cutとmixはこの意味で同値であり、cutは全てmixに置換することができる。したがって、これ以降、証明図に現れる全てのcutを、mixに置換した証明図のみを考えることにする。

次に、mixが一番下のみの証明図のgradeとrankを以下のように定義する。

- grade($\gamma$で表現)：m-論理式に含まれる論理記号の数
- rank($\rho$で表現)：次の左rankと右rankの和
  すなわち「$\rho = \rho_l + \rho_r \geqq 2$」となる。
- 左rank($\rho_l$で表現)：mixの左上式($S_1$)から上へ式をたどるとき、右辺にm-論理式を含む式の最大個数
- 右rank($\rho_r$で表現)：mixの右上式($S_2$)から上へ式をたどるとき、左辺にm-論理式を含む式の最大個数

## 4 LJのcut除去定理の証明

$\boxed{\text{補助定理}}$ mixが一番下のみにある証明図は、それを省いた証明図に変形できる。

証明図にmixが複数ある場合でも、上から順に省くことができるので、補助定理が成立するとき、同時にLJのcut除去定理も成立する。

grade$\gamma$とrank$\rho$による二重帰納法を用いて、補助定理を証明する。mixが一番下のみにある証明図全体を「$P$」とし、そのmixに関わる部分を「$P_0$」とする。$P$のgradeやrankと$P_0$の形により、次の場合分けをして、それぞれの形に適した変形を行い、$P_0$からmixを除去する。変形後、変形した$P_0$の上方と下方に、元の証明図の対応する部分を置く。但し、$P$のgradeとrankは、変形前を「$\gamma, \rho$」, 変形後を「$\gamma', \rho'$」と表現する。

1. 「$\gamma \geqq 0, \rho_l > 1, \rho_r \geqq 1$」の$P$を変形して、「$\gamma' = \gamma$, $\rho_l' < \rho_l, \rho_r' = \rho_r$」の$P$にする。
2. 「$\gamma \geqq 0, \rho_l \geqq 1, \rho_r > 1$」の$P$を変形して、「$\gamma' = \gamma$, $\rho_l' = \rho_l, \rho_r' < \rho_r$」の$P$にする。
3. 「$\gamma \geqq 0, \rho = 2$」の$P$を変形して、「$\gamma' < \gamma, \rho' \geqq \rho$ 」の$P$にする。

以下、２と３の場合の証明の一部を示す。

２.「$\gamma \geqq 0, \rho_l \geqq 1, \rho_r > 1$」の$P$を変形

(a)$S_1$の左辺がm-論理式を含んでいるとき

$$\dfrac{\Gamma \to m \quad \Sigma^+ \to \theta}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(m)$$

この$S_1$を省いて、下のようにmixを除去できる。

$$\dfrac{\dfrac{\Sigma^+ \to \theta}{m, \Sigma \to \theta}(c\text{左}' e\text{左}')}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(w\text{左}' e\text{左}')$$

(b)$S_2$がある推論規則Ｉの下式で、主論理式が左辺のm-論理式でないとき

$$\dfrac{\Gamma \to m \quad \dfrac{\Psi^+ \to \Omega}{\Sigma^+ \to \theta}(\mathrm{I})}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(m)$$

先に推論規則Ｉを行うことで、「$\rho_r' = \rho_r - 1$」となる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to m \quad \Psi^+ \to \Omega}{\Gamma, \Psi \to \Omega}(m)}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(\mathrm{I}, e\text{左}')$$

(c)$S_2$が式の構造に関する推論規則Ｉの下式で、主論理式が左辺のm-論理式のとき、この推論規則Ｉによって、$\Sigma^+$が含んでいるm-論理式の数や順が変わるだけであるので、mixをやり直せばよい。

(d)(a)ではなく、$S_2$が論理記号に関する推論規則Ｉの下式で、主論理式が左辺のm-論理式のとき、一番外側の論理記号の種類によって６通りあるが、ここではm-論理式が「$\neg A$」のときのみを示す。

$$\dfrac{\Gamma \to \neg A \quad \dfrac{\Sigma^+ \to A}{\neg A, \Sigma^+ \to}(\neg\text{左})}{\Gamma, \Sigma \to}(\neg A)$$

これを下のように変形する。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \neg A \quad \dfrac{\dfrac{\Gamma \to \neg A \quad \Sigma^+ \to A}{\Gamma, \Sigma \to A}(\neg A)}{\neg A, \Gamma, \Sigma \to}(\neg\text{左})}{\Gamma, \Gamma, \Sigma \to}(\neg A)}{\Gamma, \Sigma \to}(c\text{左}' e\text{左}')$$

上の図の、上方のmixに対する証明図は、右rankが$\rho_r$より一つ小さくなっている。よって、帰納法の仮定により、そのmixの下式は、mixのない証明図によって証明できる。したがって、下方のmixに対する証明図は、右rankが$\rho_r$が1になるようにできる。よって、帰納法の仮定により、全てのmixを省くことができる。これは、他の５通りの場合でも同じことがいえる。

３.「$\gamma \geqq 0, \rho = 2$」の$P$を変形

(a)$S_1$が始式のとき

$$\dfrac{m \to m \quad \Sigma^+ \to \theta}{m, \Sigma \to \theta}(m)$$

この$S_1$を省いて、下のようにmixを除去できる。

$$\dfrac{\Sigma^+ \to \theta}{m, \Sigma \to \theta}(c\text{左}' e\text{左}')$$

(b)$S_2$が式の構造に関する推論規則Ｉの下式のとき

$$\dfrac{\Gamma \to m \quad \dfrac{\Sigma \to \theta}{m, \Sigma \to \theta}(w\text{左})}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(m)$$

mixの上式を省いて、下のようにmixを除去できる。

$$\dfrac{\Sigma \to \theta}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(w\text{左}')$$

(c)$S_1, S_2$が論理記号に関する推論規則Ｉの下式で、主論理式が左辺のm-論理式のとき、一番外側の論理記号の種類によって６通りあるが、ここではm-論理式が「$A \wedge B$」のときのみを示す。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \quad \Gamma \to A}{\Gamma \to A \wedge B}(\wedge\text{右}) \quad \dfrac{A, \Sigma \to \theta}{A \wedge B, \Sigma \to \theta}(\wedge\text{左})}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(A \wedge B)$$

'$\Sigma^-$'は$\Sigma$から論理式$A$を全て取り去った論理式の列を表す。これは変形後、$P_0$から式$\Gamma \to B$が消え、「$\gamma' < \gamma$」の$P$となる。

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to A \quad A, \Sigma \to \theta}{\Gamma, \Sigma^- \to \theta}(A)}{\Gamma, \Sigma \to \theta}(w\text{左}', e\text{左}')$$

## 参考文献


[1] 小野寛晰:情報科学における論理,日本評論社,1994.

[2] 松本和夫:数理論理学（復刊） ,共立出版 ,2001.