整合性のジレンマとレーブの定理

2003MM113 梅田覚志
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究は[1]の内容を理解することで整合性についての考察を行い、さらにレーブの定理について理解を深めることを目的とする。

まず推論者という概念について解説する。[1]に基づいて第３章で推論者の特性、自意識について解説していく。推論者は自意識の度合いに対応して１型から４型までの定義をする。その後、第４章で推論者におけるゲーデルの定理の在り方を述べる。

次に、第５章でシステムという概念について解説する。システムについても推論者と同様に１型から４型を定義する。また第３章、第４章で述べたことが、システムについても同様であることを述べる。さらに、ゲーデルの第２不完全性定理が求められることを示す。
さらに、第３章、第４章の知識をふまえて第６章で整合性という概念に関連する補題をいくつか挙げ証明する。

最後に、第３章、第５章の知識を用いて第７章でレーブの定理を考える。自己充足信念、反射的についての解説をし、その後レーブの定理を挙げ証明する。

2 記号化について

ここでは命題を記号化するときに使用する記号、及び[1]に記載されている論理学の用語を説明する。

2.1 記号

論理記号	$\sim$（でない）
	$\&$（かつ）
	$\vee$（または）
	$\supset$（ならば）
	$\equiv$（ならば、そしてそのときに限り）
	B（信じる）
	C（正しく信じる）
矛盾記号	$\perp$
補助記号	( ), ,(コンマ)

2.2 恒真式・矛盾式

各不特定命題の真偽に関わらず、常に真となる命題を恒真式と言う。

(例)$(p \supset q) \supset (\sim q \supset \sim p)$

また、各不特定命題の真偽に関わらず、常に偽となる命題を矛盾式と言う。

(例)$(p\&(q \supset r))\&(r\&\sim p)$

恒真式の中でも特に、$(((p \supset q)\&(q \supset r)) \supset (p \supset r))$ は三段論法と呼ばれる有名なものである。

2.3 論理的帰結

命題X, Yについて、$X \supset Y$が恒真式ならば、
XはYを論理的に含意する。
YはXの論理的帰結である。
と、言われる。また、$X \equiv Y$が恒真式ならば、XとYを論理的に同値であると言われる。これは、“ XはYの論理的帰結 ”かつ“ YはXの論理的帰結 ”と言う意味である。

2.4 論理的閉包

命題の集合Sについて考えた時、以下の２つの条件を満たせば、“ Sは論理的に閉じている ”という。

1. 全ての恒真式はAに属する
2. 任意の命題p, qについて、もしpと$p \supset q$がAに属するならば、qはA属する

論理的閉法の原理

命題の集合Aが論理的に閉じていれば、Aに属する任意の命題について、これらの論理的帰結は全てAに属する。

3 推論者の特性

同じ命題でも、推論者次第でその答えは変化する。真、偽、回答不可、もしくは考えようともしない場合もあり得る。これは、推論者毎に推論能力や考え方が異なるからである。この節は推論者の能力、意識を明確に識別する事を目的とする。

3.1 正確・不正確

任意の命題pに関して、もし推論者がpを信じており、かつpが真ならば、この推論者はpに関して正確であると言う。

また、もし推論者がpを信じており、かつpが偽ならば、この推論者は不正確であると言う。

3.2 自意識の強弱による区別

“ 自意識 ”とはつまり、推論者が自分自身の推論能力についてどの程度理解しているか、その度合いのことを指す。この節では、自意識の度合いを明確に定義し、推論者を区別する。

１型の推論者

次の２つの条件を満たすものを１型の推論者と定める。

a 推論者は全ての恒真式を信じている

b 任意の命題p, qについて、もし推論者がpと$p \supset q$を信じるならば、いずれqを信じる

つまり、１型の推論者が信じる命題は論理的に閉じている。

２型の推論者

１型の推論者の条件に
・任意の命題pに関して、もし推論者がpと$p \supset q$を信じる

ならば、いずれqを信じることを信じている
が加わったとき、この推論者を２型の推論者と定める。

３型の推論者

２型の推論者の条件に
・任意の命題pに関して、もし推論者がpを信じるならば、彼は“ 自分がpを信じること ”を信じる
が加わったとき、この推論者を３型の推論者と定める。

（補足）この特性を備えた推論者の事を“ 正常である ”と言う。

４型の推論者

３型の推論者の条件に
・推論者が、自分が正常であることを信じている
が加わったとき、この推論者を４型の推論者と定める。

特性のまとめ

この節で記載した特性を論理式を用いて表現すると以下のようになる。

任意の命題p, qに関して、
$(1a)$ 推論者は全ての恒真式を信じている
$(1b)$ もし推論者がpと$p \supset q$を信じるならば、
いずれqを信じる
(2) 推論者は$(Bp\&B(p \supset q) \supset Bp)$を信じる
(3) もし推論者がpを信じるならば、彼はBpを信じる
(4) 推論者は$Bp \supset BBp$を信じる

なお、各特性に振ってある番号は、その特性が何型の推論者に対応しているかによる。

3.3　特殊な推論者

この節では、特殊な推論規則を備えた推論者について説明する。

規則的な推論者

・任意の命題pに関して、推論者がもし$p \supset q$を信じるならば、$Bp \supset Bq$を信じる
とき、この推論者を規則的であるという。

異常な推論者

任意の命題pに関して、推論者が以下の２つの条件を満たす時、この推論者を異常であると言う。

1. 推論者はpを信じている
2. 推論者は$\sim Bp$を信じている

4　ゲーテルの整合性定理

4.1　整合・不整合

論理的に閉じた命題の集合Sについて、
$\perp$にSが属するならば、Sは不整合
$\perp$にSが属ないならば、Sは整合
であると言う。

整合性の原理

Sが論理的に閉じた集合であるとすると、以下の３つの条件は互いに同値である。

1. Sは不整合である
2. Sに全ての命題が属している
3. Sに、ある命題pとその否定$\sim p$が属している

4.2　整合性定理

定理G:４型の整合な推論者が$p \equiv \sim Bp$の形式の命題を信じるならば、この推論者は自分が整合であると信じることはできない。あるいは、４型の推論者が$p \equiv \sim Bp$の形式の命題を信じ、かつ自分が整合であると信じるならば、この推論者は不整合である。

5　ゲーテル的システム

システムの定義

推論者の特性と自意識に関する結果のすべては、数理システムとそこで証明可能な命題に関する数学的結果に対応する。具体的には、
信じる：証明可能
推論者：システム
のように対応している。

また４章の定理Gも、システムについて同様のことが言える。これはゲーデルの第２不完全性定理を一般化したものである。

6　整合性のジレンマ

この章では推論者の自意識の度合いや特性、置かれた状況と、整合性との関係を題材としたものを取り上げる。具体的には次が成立する。

整合性に関する性質

1. 規則的な１型の推論者について、推論者が“ 自分が不整合であるはずがない ”と信じている（$\sim B\perp$を信じている）ならば、$\sim BB\perp$を信じる
2. ４型の推論者が命題$p \equiv (p \supset B{\sim}p)$を正しく信じているならば推論者は不整合である
3. もし４型の推論者が$p \equiv \sim Bp$と$p \equiv (Bp \supset B\perp)$を信じるならば、推論者は不整合である

7　レーブの定理

7.1　反射性

反射的なシステム：任意のシステムSにおいて、すべての命題pについて、命題$p \equiv (Bp \supset q)$がSで証明可能となる命題qが少なくとも一つ存在するならば、Sを反射的であるという。

7.2　レーブの定理

レーブの定理：反射的な４型のシステムSについて、命題$Bp \supset p$がSで証明可能ならば命題pもSで証明可能である

参考文献

[1] レイモンド・スマリアン著　長尾確・田中朋之訳：決定不能の論理パズル, 白楊社 (1990).