正規な様相論理の完全性

2003MM087 岡本太郎
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

私は今までに古典論理について学んできた。古典論理では数学における論理を形式化することができる。本研究を行うにあたって私が様相論理を選んだのは、様相論理では古典論理で、形式化することのできなかった文を形式化することができるからである。様相論理には古典命題論理の体系LK に新しく□についての推論規則をつけた体系K がある。この推論規則には様々な意味を持たすことができる。

本研究は小野[1] にしたがい、正規な様相論理を理解することを目的としている。第２章では様相論理の論理式、体系K について定義する。第３章ではクリプキによるセマンティクスを与え、その証明を与える。第４章では正規な様相論理の健全性について示す。第５章では正規な様相論理の完全性について示す。

2 様相論理

ここでは様相命題論理の論理式を定義する。

2.1 様相論理の論理式

定義2.1

1) それぞれの命題変数は論理式である
2) A, Bがともに論理式ならば$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \supset B)$,$(\neg A)$,$(\Box A)$,はいずれも論理式である。

$\neg\Box\neg A$ は $\Diamond A$ と省略する。

2.2 正規な様相論理

様相論理には多くの体系が存在する。ここでは正規な様相論理だけを考える。まずKの体系を導入する。正規な様相論理をシークエント計算の体系を用いて形式化を行う。

体系K

定義2.2

体系Kは古典命題論理の体系LKに様相演算(□)の推論規則を付け加えた形である。

$$\frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box)$$

ただし、Γ がB_1,$\cdots$,B_mのとき$\Box\Gamma$ は $\Box B_1$,$\cdots$,$\Box B_m$を表わす。

正規な様相論理

始式としてKの始式を含み、推論規則としてKの推論規則をすべて含む様相論理を正規な様相論理という。正規な様相論理はいくつかの論理式の型X_1,$\cdots$,X_kに対し、

$$\to X_i (i = 1, \cdots, k)$$

を始式として体系Kにつけ加えることで定義できる。このようにして得られる様相論理を$KX_1 \cdots X_k$と表わす。また、これらのX_1,$\cdots$,X_kをこの様相論理の公理型という。

代表的な公理型

ここで代表的な公理型をあげる。

$$T : \Box A \supset A$$
$$4 : \Box A \supset \Box\Box A$$
$$B : A \supset \Box\Diamond A$$
$$5 : \Diamond A \supset \Box\Diamond A$$

様相論理$KT4$および$KT5$はしばしば$S4$および$S5$とよばれる。本研究において$S4$および$S5$は$KT4$、$KT5$のこととする。

3 クリプキのセマンティクス

3.1 クリプキ・フレーム

定義3.1

空でない集合MとM上の二項関係Rの対(M, R)を様相論理に対するクリプキ・フレームという。Mをそれぞれのクリプキ・フレームの可能世界の集合、Rを到達可能関係という。以下ではクリプキ・フレームのことをしばしばフレームと省略する。

3.2 クリプキ・モデル

定義3.2

(M, R)をフレームとする。またVを各命題変数pに対し$V(p) \subseteq M$となるような写像とする。このとき、Vをフレーム(M, R)上の付値という。そして、3つ組(M, R, V)をクリプキ・モデルという。与えられたクリプキ・モデル(M, R, V)に対し、Mの要素と論理式の間の二項関係$\models$を次のように帰納的に定義する。

1) $a \models p \Leftrightarrow a \in V(p)$ (pは命題変数)
2) $a \models A \wedge B \Leftrightarrow a \models A$かつ $b \models B$
3) $a \models A \vee B \Leftrightarrow a \models A$または $b \models B$
4) $a \models A \supset B \Leftrightarrow a \models A$でないか、または$b \models B$
5) $a \models \neg A \Leftrightarrow a \models A$でない
6) $a \models \Box A \Leftrightarrow aRb$ となるすべてのbに対し$b \models A$

$a \models A$ であるとき、「(可能世界)aでAは真である」という。「$a \models A$でない」ことは$a \not\models A$と表す5)と6)より

7) $a \models \Diamond A \Leftrightarrow aRb$となるある$b$に対し$b \models A$

がなりたつ。 関係$\models$ は付値Vから一意的に定まるので、今後はVと$\models$ を同一視して、$\models$ のことを付値といったり、$(M, R, \models)$のことをクリプキ・モデルといったりする。

3.3　恒真な論理式

定義3.3

1) (M,R)上の任意の付値$\models$ とMの任意の要素aに対して$a \models A$となるとき、論理式Aは(M,R)で恒真である。
2) $(M,R,\models)$において、ある$b(\in M)$に対し$b \not\models A$となるとき$(M,R,\models)$で論理式Aは偽である。
3) ある付値$\models$ に対し、Aが$(M,R,\models)$で偽であるとき、Aはフレーム(M,R)で偽である。

3.4　フレーム

定義3.4

ここではKT、KTB、$S4$、$S5$フレームについて定義する。

1) Rが反射的$\Leftrightarrow (M,R)$はKTフレーム
2) Rが反射的かつ対称的$\Leftrightarrow (M,R)$はKTBフレーム
3) Rが反射的かつ推移的$\Leftrightarrow (M,R)$は$S4$フレーム
4) Rが同値関係$\Leftrightarrow (M,R)$は$S5$フレーム

4　健全性

以後、様相論理LのことをK、KT、KTB、$S4$、$S5$のどれかとする。

定理4.1　**健全性**

任意の式$\Gamma \to \Delta$に対し、$\Gamma \to \Delta$が様相論理Lで証明可能ならば、$\Gamma \to \Delta$はそれぞれの任意のLフレームで恒真である。

定理4.1は次の$1), 2)$より示すことができる。

1) 任意の始式が任意のLフレームで恒真である
2) 様相論理Lの各推論規則において上式が任意のLフレームで恒真であるならば下式も任意のLフレームで恒真である

5　正規な様相論理の完全性

ここでは前章の逆、正規な様相論理の完全性の証明を行う。

5.1　極大無矛盾

定義5.1

論理式の二つの集合の対に対してLで極大無矛盾という概念を定義する。まず様相論理の論理式全体の集合をΦとする。Φの部分集合UとVの対(U,V)がLで無矛盾であるとは、Uに属する有限個の論理式$A_1,\cdots,A_m$とVに属する有限個の論理式$B_1,\cdots,B_n$をどのように選んでも様相論理Lで式$A_1,\cdots,A_m \to B_1,\cdots,B_n$が証明可能ではないこととする。さらに$U \cup V = \Phi$であるとき$(U,V)$は$L$ で極大無矛盾であるという。

補助定理5.1

対(U_0,V_0)がLで無矛盾のとき、$U_0 \subseteq U$かつ$V_0 \subseteq V$となるΦの部分集合UとVが存在して、(U,V)はLで極大無矛盾になる。すなわち、任意の無矛盾な対は極大無矛盾な対にまで拡張できる。

5.2　カノニカルなクリプキ・モデル

定義5.2

様相論理Lのカノニカルなクリプキ・モデル$(M_L,R_L,\models_L)$を次のように定める。

1) $M_L = \{U(\subseteq \Phi) | (U,\Phi-U)$は$L$で極大無矛盾$\}$
2) $U \in M_L$に対し$U_\Box = \{A | \Box A \in U\}$
3) $U_1,U_2 \in M_L$ に対し$U_1 R_L U_2 \Leftrightarrow (U_1)_\Box \subseteq U_2$
4) 任意の$U \in M_L$および任意の命題変数pに対し$U \models_L p \Leftrightarrow p \in U$

また(M_L,R_L)をカノニカルなクリプキ・フレームという。

補助定理5.2

集合UがM_Lの要素であるならば次の$1), 2)$がなりたつ

1) 論理式$A_1,\cdots,A_m$がUに属し、式$A_1,\cdots,A_m \to B$がLで証明可能ならば論理式BもUに属する。
2) 任意の論理式Aに対し、Aか$\neg A$のどちらか一方のみがUに属する。

定理5.3

カノニカルなクリプキ・フレーム(M_L,R_L)においてフレーム(M_L,R_L)はLフレームとなる。

5.3　様相論理Lの完全性

定理5.3よりLについて完全性を示すことができる。

定理5.4

任意の式$\Gamma \to \Delta$ に対し、$\Gamma \to \Delta$ が様相論理Lで証明可能となるための必要十分条件は$\Gamma \to \Delta$ が任意のLフレームで恒真となることである。

証明

式$\Gamma \to \Delta$は任意のLのフレームで恒真であるとする。いま、$\Gamma \to \Delta$ が様相論理Lで証明可能でないとする。ここでΓを$A_1,\cdots,A_m$とし、Δを$B_1,\cdots,B_n$とすると対$(\{A_1,\cdots,A_m\},\{B_1,\cdots,B_n\})$は$L$で無矛盾になる。補助定理5.1を使うと、$L$で極大無矛盾である対$(U,V)$が存在し$\{A_1,\cdots,A_m\} \subseteq U$かつ$\{B_1,\cdots,B_n\} \subseteq V$となる。したがって$L$のカノニカルなクリプキ・モデル$(M_L,R_L,\models_L)$を考えると、$U \in M_L$でありまた$U \models_L A \Leftrightarrow A \in U$から

$$U \models_L A_i \quad (i=1,\cdots,m)$$
$$U \not\models_L B_j \quad (j=1,\cdots,n)$$

が得られる。したがって、$U \not\models_L \Gamma_* \supset \Delta^* (= (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \supset (B_1 \vee \cdots \vee B_n))$となるが、これは$\Gamma \to \Delta$ が任意のLフレームで恒真であるという仮定に反する。したがって、$\Gamma \to \Delta$はL で証明可能でなければならない。

参考文献

[1] 小野寛晰：情報科学における論理, 日本評論者, (1994)