ラムダ計算と自然演繹法

2003MM085 大石公博

指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究では、小野[1]第6章で述べられているラムダ計算と直観主義論理の自然演繹の体系との関係を理解する。特にカリー・ハワードの同型対応とよばれる型つきラムダ項と直観主義論理の自然演繹の体系NJの証明図の間の対応関係について理解することを目的とする。具体的には、まず直観主義論理の自然演繹の体系NJを深く理解するために直観主義論理のシークエントの体系LJとの同等性を証明し、次にラムダ計算について定義し、型つきラムダ項によってNJの証明図を表現できることを示す。

2 直観主義論理の体系

この節では直観主義論理の自然演繹の形式体系NJを導入する。ここではシークエント体系LJの定義と、NJとLJの関係については省略する。

2.1 自然演繹の形式体系NJ

2.1.1 NJの推論規則

自然演繹の形式体系NJの推論規則は$\supset, \wedge, \vee$についての導入(introduction)と除去(elimination)の規則からなり、そのほかに$\perp$についての規則がある。ここでは$(\supset I)$と$(\supset E)$のみ示す。

$$\dfrac{\begin{matrix}[A]\\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \supset B}\ (\supset I) \qquad \dfrac{A \qquad A \supset B}{B}\ (\supset E)$$

$(\supset I)$については、Aから何ステップかでBが導かれることを表し、$A \supset B$が導かれるときには仮定Aを必要としない。カッコ[ ]は、この推論を行なったあとAを仮定から取り除いてもよい(取り除かなくてもかまわない)ことを示す。

2.1.2 NJの証明図と結論

NJの推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式がNJの証明図である。証明図の一番下の論理式をこの証明図の結論といい、証明図の一番上にある論理式をこの証明図の仮定という。証明図の途中で使われた推論規則$(\supset I)$などによって、この証明図の仮定は取り除かれる。

一般的に、論理式Aと論理式の有限集合Sに対して、NJの証明図Pの取り除かれていない仮定がすべてSに属し、さらにPの結論がAのとき、Pは仮定SからAに到る証明図であるという。Sには取り除かれていない仮定以外の論理式が入っていてもかまわない。SからAに到る証明図が存在するとき$S \vdash_{NJ} A$ と表す。また、混乱が生じない限り、$\vdash_{NJ}$ の添字のNJを略し単に$\vdash$ と書く。

2.1.3 NJの証明可能性

仮定がすべて取り除かれているようなNJの証明図Pの結論がAであるとき、PはAに到る証明図であるという。Aに到る証明図が存在するとき、AはNJで証明可能であるといい$\vdash_{NJ} A$ と表す。

3 ラムダ計算とNJ

この節ではラムダ計算を定義し、NJと型つきラムダ計算の関係について述べる。

3.1 ラムダ計算

3.1.1 ラムダ計算の概念

ラムダ計算は関数の計算を一般的、そして抽象的に取り扱う理論であり、帰納的関数の理論と深く結びついている。最近では、関数型のプログラミング言語の性質を理論的に考察する際の枠組みとして利用されており、ラムダ計算の応用面についても研究がなされている。

ラムダ計算における基本的な演算は関数の抽出(abstraction)と関数の適用(application) の二つである。

定義 3.1 ラムダ項(λ - term)

ラムダ項は次のように帰納的に定義される。

1. 変数はラムダ項である。
2. xが変数でMがラムダ項ならば$(\lambda x.M)$はラムダ項である。
3. MおよびNがラムダ項ならば(MN)はラムダ項である。

しばしばカッコを省略し、$(\lambda x_1.(\lambda x_2.(\cdots(\lambda x_n.M)\cdots)))$を$\lambda x_1 \lambda x_2 \cdots \lambda x_n.M$ と略し(カッコを右側から補えばよく)、また、$((\cdots((MN_1)N_2)\cdots)N_n)$を$MN_1N_2\cdots N_n$と略す(カッコを左側から補う)。与えられたラムダ項Mの部分項とは、Mを構成する途中で現れるラムダ項のこととする。

3.1.2 アルファ変換

ラムダ項に対しては自由変数と束縛変数が定義される。ラムダ項Pの中で変数xが$(\lambda x.M)$の形のPの部分項の中に出現するとき、そのxの出現はPにおいて束縛されている(bound)という。そうでない変数xの出現はPにおいて自由である(free)という。ラムダ項Pにおいて変数xのある出現が束縛されているとき、xはPの束縛変数であるといい、変数xのある出現が自由であるとき、xはPの自由変数であるという。

定義 3.2 ラムダ項における代入

与えられたラムダ項M, Nと変数xに対して、ラムダ項$M[N/x]$を次のように定義する。$M[N/x]$はMの中のxの自由な出現をNで置き換えることによって得られるラムダ項を表す。

1. $x[N/x] = N$
2. $y[N/x] = y$　　(yはxと異なる変数)
3. $(PQ)[N/x] = (P[N/x])(Q[N/x])$
4. $(\lambda x.P)[N/x] = \lambda x.P$
5. $(\lambda y.P)[N/x] = \lambda y.(P[N/x])$　　(yとxは異なる変数で、yがNの中に自由な出現を持たないか、xがPの中に自由な出現を持たないとき。すなわち変数の衝突が起こらないとき。)
6. $(\lambda y.P)[N/x] = \lambda z.((P[z/y])[N/x])$　　(yとxは異なる変数で、5.以外のとき。すなわち変数の衝突が起こるとき。ただしzはPにもNにも現れないような変数とする。)

以上の準備をしたうえで、次にアルファ変換を定義する。

定義 3.3 (アルファ変換)　ラムダ項Pにおける束縛変数の置き換えとは、PからPの中の一つの部分項$\lambda x.M$を$\lambda y.(M[y/x])$で置き換えたラムダ項P'を作ることを意味する。ただしyはMに自由な出現を持たないものとする。ラムダ項Pから束縛変数の置き換えを何回か(0回でもよい)繰り返すことによりラムダ項Qが得られるとき、$P =_\alpha Q$と表し、QはPからアルファ変換により得られるという。

ここで、アルファ変換の性質として次の補助定理を示す。

補助定理 3.1　$P =_\alpha Q$ならば$Q =_\alpha P$である。

補助定理3.1はラムダ項P、Qの構成に関する帰納法によって証明される。

3.2　カリー・ハワードの対応

3.2.1　型つきラムダ計算

数学では関数を考えるときにはその定義域と値域を込めて考えている。たとえば、fは集合AからBへの関数(または写像)であるという言い方をし、$f{:}A \to B$のように表す。したがってこの場合、aに対するfの値が定義されるのは、$a \in A$のときに限られる。

ラムダ計算では(ff)のような表現も許されており、このような表現が意味を持つためにfがどんな定義域と値域を持つ関数なのかについて、ここでは型をつけたラムダ計算を与えることにより定義する。

定義 3.4　型(type)

型は次のように帰納的に定義される。

1. 型変数$a, b, c, \cdots$は型である。
2. AとBが型のとき、$(A \to B)$は型である。

混乱が生じない限り、カッコは省略してもよい。とくに$(A_1 \to (A_2 \to \cdots (A_n \to B) \cdots))$を$A_1 \to A_2 \to \cdots A_n \to B$と略す。

次に型つきラムダ項とその項の持つ型を定義する。まず、おのおのの型Aに対して型Aを持つ変数$u_1^A, u_2^A, \cdots$を無限個用意しておく。

定義 3.5　型つきラムダ項(typed λ - term)

型つきラムダ項とその型は次のように帰納的に定義される。

1. 型Aを持つ変数はすべて型つきラムダ項であり、その型はAである。
2. xが型Aを持つ変数でMが型Bを持つ型つきラムダ項ならば、$(\lambda x.M)$は型$A \to B$ を持つ型つきラムダ項である。
3. MおよびNがそれぞれ型$A \to B$とAを持つ型つきラムダ項ならば、(MN)は型Bを持つ型つきラムダ項である。

3.2.2　型つきラムダ項の図表示

与えられた型つきラムダ項を図で表現し、型だけを残すことによりNJの証明図を得ることができる。与えられた型つきラムダ項を図で表現したものを、与えられた型つきラムダ項の図表示と呼ぶ。

定理 3.1　　任意の型つきラムダ項は、含意記号のみを論理記号として持つ一つのNJの証明図を定める。特に、与えられた型つきラムダ項の型がAであるとき、それに対応するNJの証明図の結論は論理式Aである。一般に、Mが自由変数$x_1, \cdots, x_n$を含む型つきラムダ項でその型がAであり、さらに$x_1, \cdots, x_n$はそれぞれ型$B_1, \cdots, B_n$を持つとすれば、Mに対応するNJの証明図は仮定$B_1, \cdots, B_n$からAに到る証明図である。

型つきラムダ項Mに対して定理3.1により定められるNJの証明図を$\Phi(M)$と表すとする。

3.2.3　型つきラムダ項によるNJの証明図の表現

与えられた型つきラムダ項の図表示から型だけを残すことで、NJの証明図を得ることができた。次はその逆の過程(つまり、NJの証明図が与えられたとして、型つきラムダ項の図表示を得ること)とΦの関係について考える。

定理 3.2　　論理式Aに到るNJの証明図Pが型つきラムダ項Mによって表現されていると仮定する。このことを、$\Psi(P) = M$とおく。このとき、$\Phi(M) = P$が成立する。したがって、型つきラムダ項に対してNJの証明図を与える対応Φと、NJの証明図に対して型つきラムダ項を与える対応Ψとは逆対応の関係にある。正確には$\Phi(\Psi(P)) = P$および$\Psi(\Phi(M)) =_\alpha M$が成立する。

定理3.1と定理3.2より得られた型つきラムダ項とNJの証明図の間の対応関係はカリー・ハワードの同型対応(Curry-Howard isomorphism)と呼ばれ、次のように図式的に表現される。

$$
\begin{array}{ccc}
\text{型つきラムダ項} & \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} & \text{証明図} \\
| & & | \\
\text{(項の)型} & \longleftrightarrow & \text{(証明図の結論である)} \\
 & & \text{論理式}
\end{array}
$$

参考文献

[1] 小野寛晰：情報科学における論理, 日本評論社(1994).