計算機上のタブローシステム

2003MM066 村井琢
指導教員：佐々木克巳

1 はじめに

本研究では、まず丹治[?]にしたがい、命題論理を対象として、研究を進める。具体的には、タブローの方法の基本的な考え方を理解し、タブローの方法の「健全性」および「完全性」を証明することで、タブローの方法が証明の手段として通用するものであることを示す。

さらに、計算機上でタブローの方法による証明を自動で行うためのプログラムを作成することを目標とする。

2 命題論理におけるタブロー

2.1 タブローの方法の考え方

タブローの方法は、論理式 A を証明するためには、A が偽であることはありえないことを証明すればよい、という考え方に基づいている。

2.2 符号付き論理式

$\top : A$ や $\bot : A$ など、任意の論理式 A に真理値 $\top$ や $\bot$ を付加させたものを符号付き論理式という。

2.3 符号付き論理式の真理値

符号付き論理式 A の真理値は、次のように定まる。

- A が真である $\Leftrightarrow$ $\top : A$ が真である
- A が偽である $\Leftrightarrow$ $\bot : A$ が真である

2.4 符号付き論理式の分類

符号付き論理式は次の2つのタイプに分類される。

- 直接帰結タイプの符号付き論理式
  以下の符号付き論理式 α を「直接帰結タイプの符号付き論理式」といい、それに対応する符号付き論理式 $\alpha 1$ および $\alpha 2$ を次のように定義する。また、$\alpha 1$ と $\alpha 2$ を α の直接の帰結という。

α	$\top : \neg A$	$\bot : \neg A$	$\top : A \wedge B$	$\bot : A \vee B$	$\bot : A \rightarrow B$
$\alpha 1$	$\bot : A$	$\top : A$	$\top : A$	$\bot : A$	$\top : A$
$\alpha 2$	$\bot : A$	$\top : A$	$\top : B$	$\bot : B$	$\bot : B$

  符号付き論理式の真理値の定義により、α が真であるならば、$\alpha 1$ と $\alpha 2$ はともに真であり、その逆も成り立つことがわかる。

- 枝分かれタイプの符号付き論理式
  以下の符号付き論理式 β を「枝分かれタイプの符号付き論理式」といい、それに対応する符号付き論理式 $\beta 1$ および $\beta 2$ を次のように定義する。

β	$\bot : A \wedge B$	$\top : A \vee B$	$\top : A \rightarrow B$
$\beta 1$／$\beta 2$	$\bot : A$／$\bot : B$	$\top : A$／$\top : B$	$\bot : A$／$\top : B$

  符号付き論理式の真理値の定義により、β が真であれば、$\beta 1$ か$\beta 2$ の少なくとも一方が真であり、その逆も成り立つことがわかる。

2.5 タブローの定義

符号付き論理式 A のタブローとは、A から出発して、次の2つの操作を任意の回数(0回を含む)だけ適用した枝分かれ図のことをいう。ただし枝とは、出発点となっている符号付き論理式と、そこから伸びている符号付き論理式の列の1 つの先端までを指す。

- 操作(a) 直接帰結タイプの符号付き論理式 α を含む枝の先に、$\alpha 1$ または $\alpha 2$ を付け加える。
- 操作(b) 枝分かれタイプの符号付き論理式 β を含む枝の先を、$\beta 1$ と$\beta 2$ に枝分かれさせる。

2.6 枝についての定義

タブローにおける枝について、閉じた枝と完成した枝を定義する。

- 閉じた枝とは、同じ論理式 A についての符号付き論理式 $\top : A$ と $\bot : A$ を同時に含む枝のことをいう。
- 完成した枝とは、すべての直接帰結タイプの符号付き論理式 α について、そのすべての直接の帰結 $\alpha 1$ と $\alpha 2$ を含み、またすべての枝分かれタイプの符号付き論理式 β について、操作(b) を 施した枝のことをいう。

2.7 閉じたタブローと完成したタブローの定義

閉じた枝と完成したタブローについてそれぞれ定義する。

- 閉じたタブローとは、すべての枝が「閉じた枝」であるタブローのことである。
- 完成したタブローとは、すべての枝が「閉じた枝」か「完成した枝」であるタブローのことである。

2.8 タブローの方法を用いた証明

論理式 A の「証明」とは、$\bot : A$ の閉じたタブローのことをいう。

3 命題論理におけるタブローの「健全性」と「完全性」

- 命題論理におけるタブローの方法の「健全性」とは、タブローの方法によって証明される論理式はすべてトートロジーである、というものである。
- 命題論理におけるタブローの方法の「完全性」とは、トートロジーである論理式はすべてタブローの方法によって証明することができる、というものである。

「健全性」も「完全性」も証明はしたが、今回は「完全性」のみ記述する。

3.1 タブローの方法の「完全性」の証明

タブローの方法の完全性を証明するために、次の補助定理を証明する。

補助定理

$\perp : A$ の完成したタブローであって、しかも閉じていないものが存在するならば、$\perp : A$ を真とするような解釈が存在する。

証明　T を、$\perp : A$ の完成したタブローであって、しかも閉じていないものであるとする。このタブローには、完成していて、しかも閉じていない枝θ が少なくとも一本は存在し、以下の条件を満たす。

- いかなる命題変項 π についても、$\top : \pi$ と $\perp : \pi$ が同時に属することはない。
- もし枝 θ に直接帰結タイプの符号付き論理式 α が属するならば、枝 θ には $\alpha 1$ と $\alpha 2$ が属し、もし枝 θ に枝分かれタイプの符号付き論理式 β が属するならば、枝 θ には $\beta 1$ または $\beta 2$ が属する。

ここで、次のような解釈 I を与える。

解釈 I

枝 θ に $\top : \pi$ が属するような命題変項 π には「真」という真理値を与え、枝 θ に $\perp : \pi$ が属するような命題変項 π には「偽」という真理値を与える解釈。

ここで、枝 θ に属する符号付き論理式に含まれる論理結合子の数についての数学的帰納法によって、その符号付き論理式が真であることを示す。

論理結合子の数が0である論理式とは、命題変項そのものであるので、その符号付き論理式はすべて、解釈 I において真である。

論理結合子の数が n 以下であるすべての符号付き論理式が真であると仮定する ($\text{ただし、}n \geqq 0$) 。このとき、論理結合子の数が $n+1$ である任意の符号付き論理式 X が、直接帰結タイプであっても枝分かれタイプであっても真である。

よって、枝 θ に属するすべての符号付き論理式が解釈 I において真である。そして、タブローの出発点となっている符号付き論理式も枝 θ に属するので、$\perp : A$は真となる。

（証明終了）

補助定理を用いて、タブローの方法の完全性が成り立つことを示す。

補助定理の対偶をとると、

「$\perp : A$ を真とするような解釈が存在しない場合、$\perp : A$ の完成したタブローであって、しかも閉じていないものは存在しない。」

となる。$\perp : A$ を真とするような解釈が存在しない、すなわち、A がトートロジーである場合$\perp : A$ のタブローを完成させたとき、それは必ず閉じたタブローでもあるということを意味する。そして、論理結合子の数が有限個である以上、必ず有限回の操作でタブローは完成するので、タブローの方法によって証明できる、ということができる。

定理 1　タブローの方法の「完全性」

(1) もし A がトートロジーであるならば、$\perp : A$ のいかなる完成したタブローも閉じたタブローである。

(2) すべてのトートロジーは、タブローの方法によって証明可能である。

4 タブローの方法を用いた自動証明プログラム

4.1 プログラムの動き

プログラムは、以下の手順で論理式が証明可能であるかどうかを判定する。

(1) キーボードから、証明したい論理式を前置記法で入力する。

(2) 論理式を先頭から順に見ていくことで、論理式の構造を二分木を用いて表す。

(3) (2) の二分木から、タブローを二分木として表す。

(4) (3) の枝について、それに属する命題変項の真理値を調べる。命題変項 π について、$\top : \pi$ と $\perp : \pi$ が同時に属するならば矛盾を含む枝であるとする。

(5) すべての枝が閉じた枝である場合、入力された論理式は証明可能であると判定される。

(6) タブローを出力する。

4.2 プログラムの実行例

プログラムを実行したときの出力結果は以下のようになる。

```
Input Formula >> >^>pq>-pqq
           F : ((p>q)^((-p)>q))>q
           T : (p>q)^((-p)>q)
           F : q
           T : p>q
           T : (-p)>q
      F : p                     T : q
F : -p     T : q            F : -p     T : q
T : p        X              T : p        X
  X                           X
((p>q)^((-p)>q))>q is Tautology  >>>  Provable!!
```

この出力結果から、以下のことが分かる。

- 入力された論理式に真理値 $\perp$ を付加した符号付き論理式のタブローは、上記の出力結果のように書ける。
- タブローのすべての枝は閉じた枝であるので、出発点となっている符号付き論理式が真となる解釈は存在しない、つまりトートロジーである。それゆえに $((p \to q) \wedge (\neg p \to q)) \to q$ は証明可能である。

5 謝辞

本研究を進めるにあたり、御指導していただいた佐々木克巳教授に深く感謝いたします。また、様々な場面で叱咤激励してくれた研究室の皆さんに深く感謝します。

参考文献

[1] 丹治信春：タブローの方法による論理学入門, 朝倉書店(1990)