ブール関数の簡単化

2003MM043 加藤良太
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究は、小倉・高濱[1]、小倉[2]、細井[3]でとりあげられているブール関数について研究を進め、ブール関数の標準形、簡単化（カルノー図表、クワイン・マクラスキー法）について、深く理解することを目的とする。

具体的には、ブール関数の標準形の表現が一意的になるように定義されたもの、主加法標準形・主乗法標準形について定義をする。また、最簡形・簡単化について定義をし、カルノー図表、クワイン・マクラスキー法を用いてブール関数の簡単化について述べる。

2 ブール関数

2.1 ブール変数とブール関数

「真」と「偽」を合わせてブール値といい、ブール値を表す変数をブール変数という(変域が$B_2=\{0,1\}$)。以後ブール値「真」、「偽」をそれぞれ1、0と表記する。したがって、ブール変数は0または1を値とする変数として扱う。

ブール関数とは、いくつかのブール値を入力して1つのブール値を返すものをいう。代表的なブール関数として論理和・論理積・否定などがある。

2.2 n変数ブール関数

n変数ブール関数は、B_2^nからB_2への写像$f: B_2^n \to B_2$である。論理和、論理積は2変数ブール関数、否定は1変数ブール関数である。

この関数のn個の引数は、それぞれ0と1のどちらかの値をとるので、引数の値のとり方は2^n通りある。この2^n通りの値のとり方に、関数値を対応させた表を関数表という。ここでは行と列を次のように用いる。

p	$\bar{p}$
0	1
1	0

n変数ブール関数はこの関数表によって定めることができる。関数表において関数値の欄は2^n個あり、そのそれぞれに0か1の2通りがあるから異なるn変数ブール関数は全部で2^{2^n}種類あることになる。

2.3 積和形と和積形

一般に、xをブール変数として記号xを正のリテラル、$\bar{x}$を負のリテラルといい併せて単にリテラルという。

和や積は2項演算である。$x\bar{y}z$のような、いくつかのリテラルの積を積項といい、いくつかの積項の和で表わされた形式を積和形という。また、$\bar{x}+\bar{y}+z$のようないくつかのリテラルの和を和項といい、いくつかの和項の積で表わされた形式を和積形という。

3 ブール関数の標準形

3.1 ブール関数の標準形

一般に関数を式で表現するとき、同じ関数をいく通りもの形で表現することができる。ブール関数も同じであり、1つのブール関数を与える式表現は無数にある。そこで、ブール関数の表現が一意的になるように定義されたものが主加法標準形・主乗法標準形である。

3.2 主加法標準形

n変数ブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$において

$$z_1 z_2 \cdots z_n \quad (\text{ただし、} z_i \in \ \{x_i, \bar{x}_i\})$$

を最小項という。全ての項が最小項からなる積和形の形を主加法標準形という。具体的には、以下をブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の主加法標準形という。

$$\sum_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in\{0,1\}^n} f(p_1,p_2,\cdots,p_n)\cdot(z_1 z_2 \cdots z_n)$$

ただし、

$$z_i = \begin{cases} x_i & (p_i\text{=1のとき}) \\ \bar{x}_i & (p_i\text{=0のとき}) \end{cases}$$

である。

n変数ブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の主加法標準形は、関数表を用いて得られる。まず、関数表の各行に対して変数値が1ならばその変数を正のリテラルとし、0ならばその変数を負のリテラルとして、それらの積からなる最小項を構成する。たとえば、変数$x_1,x_2,\cdots,x_n$の値が全て0の行に対する最小項は$\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n$であり、$x_1$のみが1の行に対する最小項は$x_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n$である。主加法標準形は、関数表で関数値が1の行に対応する最小項の和
$\bar{x}_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n\cdot f(0,0,\cdots,0)+x_1\bar{x}_2\cdots\bar{x}_n\cdot f(1,0,\cdots,0)+\cdots+x_1x_2\cdots x_n\cdot f(1,1,\cdots,1)$である。

3.3 主乗法標準形

n変数ブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$において

$$z_1+z_2+\cdots+z_n \quad (\text{ただし、} z_i \in \ \{x_i, \bar{x}_i\})$$

を最大項という。全ての項が最大項からなる和積形の形を主乗法標準形という。具体的には、以下をブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の主乗法標準形という。

$$\Pi_{(p_1,p_2,\cdots,p_n)\in\{0,1\}^n} f(p_1,p_2,\cdots,p_n)\cdot(z_1+z_2+\cdots+z_n)$$

ただし、

$$z_i = \begin{cases} x_i & (p_i\text{=1のとき}) \\ \bar{x}_i & (p_i\text{=0のとき}) \end{cases}$$

である。

n変数ブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の主乗法標準形は、関数表、ド・モルガン律を用いてそれぞれ得られる。

ド・モルガン律では、まず、ブール関数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$の否定形に対応する関数表を作る。次に、その関数表に対応する主加法標準形を作る。さらに、得られた式の否定と同値な主乗法標準形をド・モルガン律より求める。

4　ブール関数の簡単化

4.1　ブール関数の簡単化

1つのブール関数を表わす形式は様々である。論理回路は論理式に従って構成される為なるべく簡単な表現が望ましい。ここでは形式に現われる項が少なく変数の数も少ないものを簡単な表現として扱い、この意味で最も簡単な表現を最簡形という。また、$\bar{x}z + yz$と$(\bar{x}+y)z$は同じブール関数を表わしており後者の方がリテラルの数は少ない。ここでは前者の積和形の最簡形を優先する。

標準形で表わされた簡単化の基本は、補元の性質、単位元の性質、零元の性質、分配律を利用するものである。つまり、Pをブール関数として

$$xP + \bar{x}P = (x+\bar{x})P = P \cdots (1)$$

とする。どの2つの項を組み合わせるかには任意性があり、常に同じ最簡形が得られるとは限らない。最簡形を求めることを簡単化という。

4.2　カルノー図表による簡単化

カルノー図表は、関数表を変形して簡単化できる項を見通しよく組み合わせる為のものである。カルノー図表の書き方として、関数値の対の並べ方が00,01,10,11のように2進数としての順序ではなく、00,01,11,10と配置する。また、見やすくするために関数値が1の所だけ値を書く。つまり、主加法標準形の各最小項が対応する欄に1を記入する。たとえば、最小項$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_2x_3$に対応する欄は、それぞれ$(x_1,x_2,x_3) = (0,0,0),(0,0,1)$の欄である。このような表をカルノー図表という。

カルノー図表の1を書き込んである欄、これを0次サブキューブ(SC)と呼ぶ。隣り合っている2つの0次SCを線でくくる。これを1次SCという。さらに、2つの1次SCが上下あるいは左右に隣り合っている場合、隣り合った2つの1次SCを線でくくったものを2次SCという。3次以上のSCも同様に定義する。

0次SCは欄であり最小項が対応する。その最小項は対応する0次SCのみで値1をとるブール関数である。1次SCは2つの0次SCから構成される。その2つの0次SCは表で上下あるいは左右に隣り合っているので、カルノー図表の性質からそれらに対応する最小項の和は、(1)式より簡単化して変数を1つ減らせる。この簡単化の結果をもとの1次SCに対応する項という。この項は対応する1次SCのみで値1をとるブール関数である。同様に2次SCに対してもそれを構成する2つの1次SCに対応する項は、(1)式より簡単化して変数を1つ減らせる。この簡単化の結果をもとの2次SCに対応する項という。この項は対応する2次SCのみで値は1をとるブール関数である。同様に3次以上のSCに対応する項を定義する。この項は対応するSCのみで値1をとるブール関数である。

簡単化の手順を述べる。まず、カルノー図表を書く。次に0次SC全体をできるだけ高次のSCかつ少数のSCで覆う。これらのSC に対応する項の和が求める最簡形である。最簡形であることの理由として、高次のSCで覆うことが変数の数を減らし、少数のSCで覆うことが形式に現われる項を少なくするからである。

最簡形を構成する項は、対応するSCにおいてのみで値1をとるブール関数であり、それらの項の和は与えられたもとの関数を表わしている。

x_1	0	0	1	1
x_3 x_2	0	1	1	0
0	1			
1	1	1	1	1

図1　カルノー図表による$f(x_1,x_2,x_3)$の簡単化

4.3　クワイン・マクラスキー法による簡単化

積和標準形の最小項において、正のリテラルの数をその最小項のハミング重みという。例えば、$\bar{x}_1x_2x_3$のハミング重みは2である。簡単化できる隣接項(1つの変数のみ符号の異なるリテラルとなっている項)はハミング重みが1だけ異なる。主加法標準形に現われる最小項をハミング重みで分類し、ハミング重みが1だけ異なる項の間で隣接項を選び簡単化する。全ての可能な組み合わせで簡単化すると、最簡形に現われる全ての項の候補が得られる。これを素項という。ここから、各素項がどの最小項から得られたかを示す表をつくる。これを素項表という。得られた素項の中から素項表により必要な項を選び出し、それらの和をとれば目的の最簡形が得られる。これがクワイン・マクラスキー法である。

次のブール関数を上記の方法で簡単化する。

$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 +$
$x_1x_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_4$

この関数の最小項を左から、1から9までの番号をつける。ここから、上記の方法で素項表をつくると次のようになる。

表1　素項表(縦：素項、横：最小項)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$	*	*							
$x_1\bar{x}_2\bar{x}_4$		*				*			
$\bar{x}_1\bar{x}_3$	*		*	*	*				
x_1x_3						*	*	*	*

全ての最小項に少なくとも1つのチェックがつく素項を選ぶ。この場合、3･4番目の素項があれば2の最小項に対応するものだけになる。2の最小項は、1番目あるいは2番目の素項をとるので求める最簡形は、

$$\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3, \quad x_1\bar{x}_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3$$

5　まとめ

本研究において、カルノー図表を用いると直観的に簡単化できた。しかし、2次元的に表現せざるを得ない為、変数が多い場合は簡単化を行った後で、必要な項のみを集めるクワイン・マクラスキー法を用いることが良い。場面に応じた簡単化を用いる必要がある。

参考文献

[1] 小倉久和,高濱徹行:情報の論理数学入門,近代科学社(1991).

[2] 小倉久和:情報の基礎離散数学，近代科学社(1999).

[3] 細井勉:情報科学のための論理数学，日本評論社(1992).