述語論理における健全性定理

2003MM042 加藤亮
指導教員: 佐々木克巳

1 はじめに

本研究では、小野[1]の第2章でとりあげられている述語論理における健全性定理について理解を深めていくことを目的とする。具体的には、LKの健全性の証明において[1]では扱われていない部分を補うことでその理解を深めていく。

2 述語論理の論理式

述語論理では対象とするものの集まりを考え、それらの性質や関係を記述する。対象の集まりとして何をとるかによって、それらの対象の関係を記述する述語記号の選び方も違ってくる。そこであることがらを論じようとしたとき、それを述語論理で記述するために必要な記号の集まりを言語といい、言語は以下のものからなる。

1 論理結合子 $\wedge, \vee, \supset, \neg$
2 量化記号 $\forall, \exists$
3 対象変数 $x, y, z \cdots$
4 対象定数 $c, d \cdots$
5 関数記号 $f, g \cdots$
6 述語記号 $P, Q \cdots$
7 補助記号 (,), ,(コンマ)

1,2,3は全ての言語に共通して用いられるのに対し、4,5,6は言語によって選び方が変わってくる。対象定数や関数記号は一つもなくてもよいが、述語記号は少なくとも一つは必要となってくる。

・項の定義

1 それぞれの対象変数、対象定数は項である。
2 fがm変数の関数記号、$t_1, \cdots, t_m$が項であるならば$f(t_1, \cdots, t_m)$は項である。

・論理式の定義

1 Pがn変数の述語記号、$t_1, \cdots, t_n$が項であるならば$P(t_1, \cdots, t_n)$は論理式(この形の論理式を原始論理式という)である。
2 A, Bが論理式のとき$(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B), (\neg A)$は論理式である。
3 Aが論理式であり、xが対象変数ならば$(\forall x A)$, $(\exists x A)$は論理式である。

また、論理式$(A \supset B) \wedge (B \supset A)$を$A \equiv B$と略し、これを$A$と$B$は同等であるという。

・項の代入

論理式Aにおける項tの変数xへの代入$A[t/x]$を次のように定義する。xを変数、tを項とする。

1) sを項とするときsに現れるすべてのxの出現をtでおきかえられる項を$s[t/x]$と表す。
2) Aが原始論理式$P(s_1, \cdots, s_n)$のとき、$A[t/x]$は$P(s_1[t/x], \cdots, s_n[t/x])$を表す。
3) Aが$B * C$($*$は$\wedge, \vee, \supset$のいずれか)の形であるとき、$A[t/x]$は$B[t/x] * C[t/x]$を表す。
また、Aが$\neg B$のとき、$A[t/x]$は$\neg(B[t/x])$を表す。
4) Aが$\forall z B$または$\exists z B$の形であるとする。xがAの自由変数でないとき、$A[t/x]$はAを表す。そうでないとき, もしtにzが出現しなければ、$A[t/x]$は$\forall z(B[t/x])$, $\exists z(B[t/x])$を表す。tにzが出現する場合には、$A[t/x]$は$\forall u((B[u/z])[t/x])$, $\exists u((B[u/z])[t/x])$を表す。ただし、uはA, tに現れない対象変数とする。

3 述語論理における構造と解釈

・言語Lに対する構造$\langle U, I \rangle$の定義

1 Uは空でない集合(これを対象領域という)。
2 Iは言語Lの対象定数、関数記号、述語記号のそれぞれに対してUの要素、U上の関数, U上の述語を対応させる写像である。

言語Lに対する構造$M (= \langle U, I \rangle)$において言語$L$上の論理式の意味づけを与えるために$U$の各要素$u$に対する名前$\underline{u}$を新たに対象定数として$L$につけ加える。こうして得られた言語を$L[M]$と表す。

言語Lに対する構造が与えられたとすると、言語L上の項と論理式の意味づけはつぎのように定められる。

tを$L[M]$上の項とする。tが変数を一つも含まないときUの要素t^Mをつぎのように定める。

1 tが対象定数のとき、$t^M = c^I$
2 tが$f(t_1, \cdots, t_n)$のとき、$t^M = f^I(t_1^M, \cdots, t_n^M)$

Aを$L[M]$の閉じた論理式(Aは自由変数を一つも含まない)とするとき、AがMで正しいかどうかを帰納的に定義する。ここでAが正しいときM⊨Aそうでないとき $M \nvDash$A と表す。

1 Aが原始論理式$P(t_1, \cdots, t_n)$のとき、
$M \vDash P(t_1, \cdots, t_n) \Leftrightarrow (t_1^M, \cdots, t_n^M) \in P^I$
2 $M \vDash A \wedge B \Leftrightarrow M \vDash A$かつ$M \vDash B$
3 $M \vDash A \vee B \Leftrightarrow M \vdash A$または$M \vDash B$
4 $M \vDash A \supset B \Leftrightarrow M \nvDash A$または$M \vDash B$
5 $M \vDash \neg A \Leftrightarrow M \nvDash A$
6 $M \vDash \forall x A \Leftrightarrow$ すべての$u \in U$に対して$M \vDash A[\underline{u}/x]$
7 $M \vDash \exists x A \Leftrightarrow$ ある$u \in U$に対して$M \vDash A[\underline{u}/x]$

これでAが$L[M]$の閉じた論理式M⊨ Aの定義を終了とする。

L上の任意の論理式Aに対するM⊨ Aの定義はつぎのようにおこなう。A^*をAの閉包とする(論理式Aの自由変数が$x_1, \cdots, x_m$のとき、A^*は$\forall x_1 \cdots \forall x_m A$を表す。) このとき、

$$M \vDash A \Leftrightarrow M \vDash A^*$$

これにより$M \vDash A$を定義する。

恒真な論理式とは、Aを言語L上の論理式としたときに言語Lに対する任意の構造Mに対して$M \vDash A$となることであり、これは命題論理におけるトートロジーの概念に

対応する。

4 古典述語論理の形式体系LK

体系LKにおける基本的な表現は式とよばれるものであり、ここで式とは

$A_1, \cdots, A_m \rightarrow B_1, \cdots, B_n$

という形をした表現である。ただし、おのおのA_iおよびB_jは論理式である。ここで、mやnは0でもよい。

我々が推論をおこなうときには、議論の前提となる命題(公理)と、すでに導かれたいくつかの命題から別の命題を導くための規則(推論規則)とが使われる。

LKで公理に相当するものは始式である。LKの始式は

$A \rightarrow A$

という形の式である。ここでAは任意の論理式とする。

LKの推論規則は21個ある。ここでは量化記号に関する4個の推論規則のみをかく。

$$(\forall 左)\frac{A[t/x],\, \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x A,\, \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad (\forall 右)\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A[y/x]}{\Gamma \rightarrow \Delta, \forall x A}$$

$$(\exists 左)\frac{A[y/x],\, \Gamma \rightarrow \Delta}{\exists x A,\, \Gamma \rightarrow \Delta} \qquad (\exists 右)\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, A[t/x]}{\Gamma \rightarrow \Delta, \exists x A}$$

ここで、tは項、yは対象変数である。ただし、($\forall$右) と($\exists$左)の推論規則を適用できるのは、変数yがこれら の下式のどの論理式にも自由な出現を持たない場合に限られる。

証明図およびその証明図の終式をつぎのように帰納的に定義する。

1)始式はそれだけで証明図であり、その証明図の終式はその始式自身である。

2)P_1(およびP_2)はそれぞれS_1(およびS_2)をその終式とする証明図とする。

さらに、

$\dfrac{S_1}{S}$ または $\dfrac{S_1 \quad S_2}{S}$

が、LKの推論規則の一つであれば、

$\dfrac{P_1}{S}$ または $\dfrac{P_1 \quad P_2}{S}$

は証明図であり、その終式はSである。

式Sを終式とするような証明図が存在するときには、SはLKで証明可能であるという。式 $\rightarrow A$がLKで証明可能であるとき、論理式AがLKで証明可能であるという。

5 健全性の証明

健全性を示すにあたって、論理式の列$A_1, \cdots, A_m$をΓと表すとき、論理式Γ_*およびΓ^*を以下のように定める。

$m>0$ならば、$\Gamma_* = A_1 \wedge \cdots \wedge A_m$ $\quad \Gamma^* = A_1 \vee \cdots \vee A_m$

$m=0$ならば、$\Gamma_* = \top$ $\quad \Gamma^* = \perp$

ただし、$\top$はある恒真な論理式を表し、$\perp$ はその否定を表す。式$\Gamma \rightarrow \Delta$が恒真であるとは、論理式$\Gamma_* \supset \Delta^*$が恒真であるとする。

定理5.1 (LKの健全性)

任意の式$\Gamma \rightarrow \Delta$に対し、$\Gamma \rightarrow \Delta$がLKで証明可能ならば $\Gamma \rightarrow \Delta$は恒真である。

この証明は、LKの始式が恒真であることと、LKの各推論規則において上式が恒真であるならば下式も恒真であることを示すことによっておこなわれる。[1]では推論規則($\forall$右), ($\supset$右), ($\supset$左)のみについて示してあるが、ここでは($\vee$左), ($\exists$左) に関して示す。残りの推論規則は卒業論文で証明をした。

($\vee$左)のとき：$\Gamma_* \supset (\Delta^* \vee A)$および$(B \wedge \Pi_*) \supset \Sigma^*$が恒真であると仮定して、$((A \supset B) \wedge \Gamma_* \wedge \Pi_*) \supset (\Delta^* \vee \Sigma^*)$が恒真になることを示す。ここで、任意の構造$M = \langle U, I \rangle$に対し、

1)$M \vDash ((A \supset B) \wedge \Gamma_* \wedge \Pi_*)$

を仮定する。すると$M \vDash A \supset B, M \vDash \Gamma, M \vDash \Pi$となる。

1.1)$M \nvDash A$

とすると、仮定より$M \vDash \Gamma_* \supset (\Delta^* \vee A)$であるから、

$M \vDash \Gamma_*, M \nvDash A$より$M \vDash \Delta^*$

1.2)$M \vDash A$

とすると、$M \vDash A \supset B$より$M \vDash B$となる。また、

$M \vDash (B \wedge \Pi_*) \supset \Sigma^*$であるが、$M \vDash \Pi_*$より$M \vDash \Sigma^*$ となる。よっていずれの場合にも$M \vDash \Delta^* \vee \Sigma^*$となる。

($\exists$左)のとき：仮定より、

$\forall z_1, \cdots, \forall z_n \forall y((A[y/x] \wedge \Gamma^*) \supset \Delta^*)$ は恒真である。ここで$z_1, \cdots, z_n$は$\exists x A, \Gamma \rightarrow \Delta$に現れるすべてての自由変数を並べたものである。いま任意の構造$M = \langle U, I \rangle$に対し、

$M \vDash \forall z_1, \cdots, \forall z_n((\exists x A \wedge \Gamma_*) \supset \Delta^*)$

を示せばよい。そのために$u_1, \cdots, u_n \in U$を任意にとり

1)$M \vDash (\exists x A' \wedge \Gamma') \supset \Delta'$

を示す。ただし、A', Γ', Δ'は$A, \Gamma*, \Delta*$の$z_1, \cdots, z_n$ の出現をそれぞれ$u_1, \cdots, u_n$におきかえて得られる論理式である。$(\exists x A)[u_1/z_1, \cdots, u_n/z_n]$ は$\exists x(A[u_1/z_1, \cdots, u_n/z_n])$すなわち$\exists x A'$に等しい。仮定より任意の$w \in U$に対し、

2)$M \vDash ((A'[y/x] \wedge \Gamma') \supset \Delta')[\underline{w}/y]$

がなりたつ。ここでΓ', Δ'にはyは自由な出現を持た ないため$\Gamma'[\underline{w}/y], \Delta[\underline{w}/y]$は$\Gamma', \Delta'$に等しい。また$y$は$A$にも自由な出現を持たないため$A'[y/x][\underline{w}/y]$は$A'[\underline{w}/x]$と等しくなる。よって、

3)$M \vDash (A'[\underline{w}/x] \wedge \Gamma') \supset \Delta'$ が任意の$w \in U$に対してなりたつ。いま、

4)$M \vDash \exists x A'$かつ$M \vDash \Gamma'$

とする。$M \vDash \exists x A'$より、ある$v \in U$に対し, $M \vDash A'[\underline{v}/x]$となるため

5)$M \vDash A'[\underline{v}/x]$かつ$M \vDash \Gamma'$

となる。3)より

6)$M \vDash (A'[\underline{v}/x] \wedge \Gamma') \supset \Delta'$

がいえるため、5)と6)より

7)$M \vDash \Delta'$

が導かれる。よって

8)$M \vDash \exists x A'$かつ$M \vDash \Gamma'$ならば$M \vDash \Delta'$

となり1)が得られる。

参考文献

[1] 小野寛晰：情報科学における論理、日本評論社(1994)