

# アクロボット倒立振子の安定化制御 － 状態フィードバックとオブザーバ －

2002MM107 渡辺 弘晃

指導教員 高見 勲

## 1 はじめに

本研究では、アクロボット倒立振子を用い振り上げた状態において状態フィードバックを用い安定化制御を行う。状態フィードバックという制御手段は、すべての状態変数にセンサを付けることが前提となる。しかし実際にはこのことが満足されているとは限らず、状態変数を推定する方法としてオブザーバがよく使われている。そこで状態フィードバックにオブザーバを用いることによって倒立振子の安定化制御系を設計するとどのような効果が得られるかを評価する。

## 2 モデリング

制御対象を図 1 に示す。

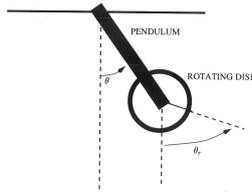
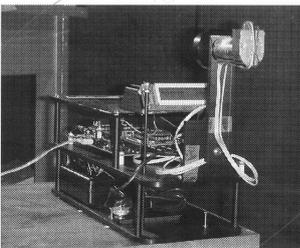


図 1 シミュレーション、実験で用いる制御対象

### 2.1 物理モデル

ラグランジュの運動方程式を用いモデル化すると以下のようなになる。

$$\ddot{\theta} + a \sin \theta = -b_p(u - F) \quad (1)$$

$$\ddot{\theta}_r = b_r(u - F) \quad (2)$$

( $a = \frac{mgl}{J} = 78.4227$ ,  $b_p = \frac{kI_{max}}{10J} = 1.0805$ ,  $b_r = \frac{kI_{max}}{J_r} = 197.9960$ )

$\theta$  は振子の角度、 $\theta_r$  は振子の先端部分に付いているローターの角度、 $u$  はトルク、 $F$  は摩擦トルク、 $m$  はローターと振子全体の重さ、 $\ell$  は回転軸からローターと振子全体の重心までの距離、 $J$  はローターと振子に働く慣性力、 $k$  はモーターの起電力定数、 $I_{max}$  はモーターに流れる最大電流、 $J_r$  はローターに働く慣性力を表す。ここで倒立振子を振り上げた状態と想定し、 $\theta = \pi$  の周りで線形化すると以下のようなになる。また、 $F$  は微小なため無視する [1]。

$$\ddot{\theta} - a\theta = -b_p u \quad (3)$$

$$\ddot{\theta}_r = b_r u \quad (4)$$

### 2.2 状態空間表現

(3) 式、(4) 式を状態空間表現で表すと以下のようなになる。

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \quad (5)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.0000 & 0 & 0 \\ 78.4227 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1.0805 \\ 0 \\ 197.9960 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## 3 最適レギュレータ

制御入力を以下のようにする。

$$u(t) = Kx(t)$$

$$K = -k_{pp} - k_{dp} - k_{dr} - d_{dr}$$

状態フィードバックゲイン  $K$  は  $A + BK$  の固有値の実部がすべて負となるように選ぶ。

本研究ではフィードバックゲイン  $K$  の設計法に最適レギュレータを用いる。

### 3.1 最適レギュレータ理論

可制御な (5) 式に対して状態フィードバック  $u = -Fx$  を用いて適切に安定させたいとする。そのために、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + R(t)u(t)^2) dt$$

を最小化する問題を考える。ここで、 $x(t)$  は状態変数を表す。今回  $Q$  を

$$Q = \text{diag}\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \quad (q_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, 4)$$

とすると、評価関数は

$$J = \int_0^{\infty} (q_1 x_1(t)^2 + \dots + q_4 x_4(t)^2 + R(t)u(t)^2) dt$$

となり、 $q_i$  を大きくすれば  $x_i(t)$  の収束を重視し、 $R$  を大きくすれば  $u(t)$  の収束を重視することになる。またフィードバックゲインは唯一に定まり、

$$K = -R^{-1}B^T P$$

で与えられる。ただし、 $P$  はリカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

を満足する唯一の正定対称解である [2]。

### 3.2 シミュレーションと実験結果

実際に重み  $Q, R$  を以下のように与えるとする。

$$Q = \text{diag}\{q_1, 0, q_3, 0\} \quad (q_1, q_3 \text{は適宜指定}), \quad R = 1$$

1つの例として、 $q_1 = 100$ 、 $q_3 = 0.01$  と設定し、 $K$  を  $K = [-285.3615 \quad -32.2038 \quad -0.100 \quad -0.0544]$  と選ぶと図2の左の図のようなシミュレーション結果を得た。さらに図2の右の図のような実験結果が得られる。

図2 シミュレーションしたときの の時間的変化(左) 実験したときの の時間的変化(右)

シミュレーション上では  $0(\text{rad})$  に収束しており制御対象を安定化することができていることが確認できる。また、実験においては振り上げ制御からバランシング制御までを行っており、シミュレーション上ではバランシング制御のみ行っているためシミュレーションとは波形は異なるが、波形をみると安定化することが出来ていることが確認できる。

## 4 オブザーバを用いた出力フィードバック

### 4.1 同次元状態オブザーバ

入力  $u$  と出力  $y$  の情報からシステムの内部の状態  $x$  を推定するシステムをオブザーバという。

状態推定のための基本アイデアは対象システムのモデル

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t), \quad \hat{y}(t) = C\hat{x}(t) \quad (6)$$

を用いることである。このとき、状態の推定誤差は

$$e(t) = \hat{x}(t) - x(t) \quad (7)$$

となる。そこで

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) - L(C\hat{x}(t) - y(t)) \quad (8)$$

( $L(C\hat{x}(t) - y)$  が修正項、 $L$  は調整パラメータ) のような形で、フィードバックを付加する。(A, C) が可観測ならば  $A - LC$  を安定にするオブザーバゲイン  $L$  が存在し、システムの極を任意に指定できる。このような、対象システムのモデルに対して対象システムの出力とそのモデルの出力の誤差のフィードバックを付加し、必ずしも安定でない対象システムに対しても、状態推定が行われるようにした機構を、同次元状態オブザーバと呼び、ブロック線図は図3のようになる [3]。

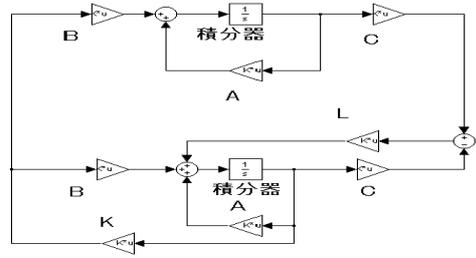


図3 同次元状態オブザーバのブロック線図

### 4.2 シミュレーション

今回、対象システムの極を  $[-14.6491 \pm 11.6795i \quad -1.5266 + 1.4468i]$  オブザーバの極を  $[-30.6178 \pm 6.8134i \quad -28.9183 \pm 6.1388i]$  と選ぶと図4の左の図のようなシミュレーション結果になり、さらに図4の右の図のような実験になる結果が得られる。

図4 シミュレーションしたときの の時間的変化(左) 実験したときの の時間的変化(右)

シミュレーション上においてオブザーバの極が対象システムの極よりも左に位置したときのみ収束し、近いときには収束するものの一定の安定した振動が生じたが、オブザーバの極をさらに左の方にもっていくことによって振動もなくなり、オブザーバを付ける前とほぼ同じ波形を得ることが出来た。また、実験においてゲイン  $K$  が小さいときには制御対象である振子を安定化させることができなかつたがゲイン  $K$  を大きくすることによって制御することが可能になった。

## 5 おわりに

本研究では最適レギュレータを用いて適度なゲイン  $K$  を設計することができたことをシミュレーション、実験によって確認できた。また、オブザーバをつけたときシミュレーション、実験において安定な制御をすることができ、オブザーバが有効であることを確認することができた。

## 参考文献

- [1] Karl J.Astrom, Daniel J.Block, Mark W.Spong: 「THE REACTION WHEEL PENDULUM」(2001)
- [2] 川田昌克, 西岡勝博: 「MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学」, 森北出版 (2001)
- [3] 梶原宏之: 「線形システム制御入門」, コロナ社 (2000)