

磁気浮上実験機における2入力2出力システムの制御

2002MM072 奥田 哲也

指導教員 高見 勲

1 はじめに

多入力多出力システムはシステムが干渉しあう。このシステムの中に不安定な要素があると、干渉した結果、それらは不安定な系となる。このような不安定なシステムは制御する事が難しい。よってこれらの不安定要素を安定要素として補償する必要がある。本研究では、多入力多出力のシステムの中でも2入力2出力システムである磁気浮上実験機を制御対象とした。また、磁気浮上実験機は不安定なシステムを含んでいる。この不安定な要素をいかに安定にし、それぞれを独立に制御する事が本研究の目的である。

2 磁気浮上実験機のモデリング

本研究ではそれぞれの磁石に対し、運動方程式を立て、テラー近似によって線形化し、状態方程式を導き出す [1].

2.1 物理モデルの作成

磁気浮上実験機の物理モデルは図1のような力の関係になる。この力関係より物理学の運動方程式を立てる。

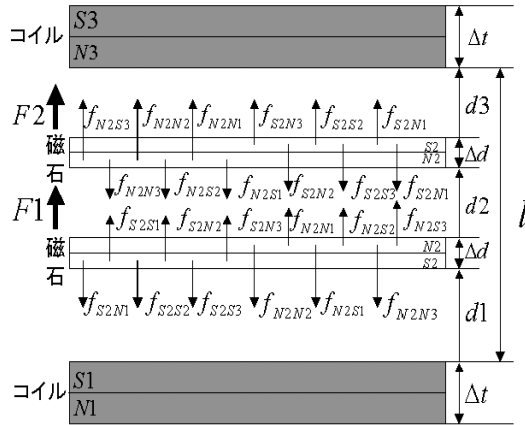


図1 磁気浮上システムにおける磁力関係

2.2 線形化

2.1章で求めた運動方程式を線形化し、下式を得る。

$$0.12\ddot{y}_1^* + 0.5530\dot{y}_1^* = -33.068y_1^* + 1.161y_2^* + 0.442u_1^* + 0.016u_2^* \quad (1)$$

$$0.12\ddot{y}_2^* + 1.1172\dot{y}_2^* = 1.161y_1^* + 1.594y_2^* - 0.033u_1^* + 0.123u_2^* \quad (2)$$

3 磁石が独立の場合

(1)式, (2)式より伝達関数を求める。上の磁石に下のコイルから、下の磁石に上のコイルからそれぞれ影響が無いと仮定した伝達関数を求める。

$$G_1(s) = \frac{3.727}{s^2 + 4.61s + 300} \quad (3)$$

$$G_2(s) = \frac{1.03}{s^2 + 4.61s - 24.6} \quad (4)$$

ここで式(4)の分母に負の係数の項があり、不安定である。安定化をはかる為、補償器を設計する。

3.1 補償器

(4)式で表される制御系に対し、フィードバックの補償器を設計する。この時補償器は $K_1s + K_2$ とする。

$$G_2(s) = \frac{1.03}{1 + \frac{1.03}{s^2 + 4.61s - 24.6}(K_1s + K_2)}$$

$$= \frac{1.03}{s^2 + (4.61 + 1.03K_1)s - 24.6 + 1.03K_2} \quad (5)$$

これらに条件を設定し、以下のように決定した。

$$K_1s + K_2 = s + 32.8155 \quad (6)$$

安定化された伝達関数は次式となる。

$$G_2(s) = \frac{1.03}{s^2 + 5.64s + 9} \quad (7)$$

4 干渉系

安定化された状態方程式は、式(1), (2)の u_2^* に $u_2^* - K_1y_2 - K_2y_2$ を代入し求める次式のようなになる [2][3][5].

$$G(s) = \frac{1}{s^4 + a_0s^3 + a_1s^2 + a_2s + a_3} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (8)$$

この時、極は安定極となっている。

4.1 シミュレーション

干渉系のシミュレーションを図2に示す。

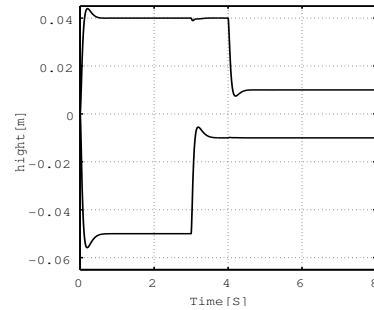


図2 干渉系のシミュレーション

4.2 干渉系のシミュレーションの考察

図2より干渉した結果、かすかではあるが影響が出ている。実機に実装した場合はより顕著に影響がでると考えられる。また、実験を行った所、干渉により制御することはできなかった。本研究では非干渉化法を用いて干渉を小さくすることとする。

5 非干渉制御

非干渉系を作る方法として、入出力の関係を完全に1対1に分離する方法(非干渉化制御)を扱う事とする。まず、 y_i を α_i 回微分した式を(9)式とする。

$$y_i^{(\alpha_i)} = C_i A^{\alpha_i} x + C_i A^{\alpha_i - 1} B u \quad (9)$$

$$u = -H_d^{-1} G_d x + H_d^{-1} y^{(\alpha_i)} \quad (10)$$

新たな入力 V により、出力 y との間に1対1の関係をもたせて非干渉化を図る為、(10)式の $y^{(\alpha_i)} = v_i$ とする。(A, B)が可制御なシステムを、状態フィードバックによって非干渉化する。

$$C = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_m \end{bmatrix} : C_i (1 \times n) \quad (11)$$

とし、

$$H_d = \begin{bmatrix} C_1 A^{\alpha_1 - 1} B \\ C_2 A^{\alpha_2 - 1} B \\ \vdots \\ C_m A^{\alpha_m - 1} B \end{bmatrix} \quad (12)$$

を作ったとき、 $|H_d| \neq 0$ の成立することが非干渉化のための必要十分条件となる。

$$\alpha_i = \min\{j | C_i A^{j-1} B \neq 0 : j = 1, 2, \dots, n\} \quad (13)$$

(13) 式の意味は、 $C_i A^{j-1} B$ がはじめて零行列とならないときの j の値を α_i とするということである。このとき、

$$\underline{G}_d = \begin{bmatrix} C_1 A^{\alpha_1} \\ C_2 A^{\alpha_2} \\ \vdots \\ C_m A^{\alpha_m} \end{bmatrix} \quad (14)$$

とおくと、

$$\begin{aligned} u(t) &= G_d x(t) + H_d v(t) \\ &= -\underline{H}_d^{-1} \underline{G}_d x(t) + \underline{H}_d^{-1} v(t) \end{aligned} \quad (15)$$

ここに、

$$G_d = -\underline{H}_d^{-1} \underline{G}_d, \quad H_d = \underline{H}_d^{-1} \quad (16)$$

よって非干渉化された閉ループシステムは以下ようになる。

$$\dot{x}(t) = (A - B \underline{H}_d^{-1} \underline{G}_d) x(t) + B \underline{H}_d^{-1} v(t) \quad (17)$$

$$y(t) = C x(t) \quad (18)$$

5.1 極の設定

伝達関数の極を以下のようにして任意に設定する。(10) 式における y の要素 y_i を次のように選ぶ。

$$y_i^{(\alpha_i)} = -B_{i1} y_i^{(\alpha_i-1)} - B_{i2} y_i^{(\alpha_i-2)} \dots - B_{i\alpha_i} y_i + V_i \quad (19)$$

初期条件を 0 としてラプラス変換し、 $\frac{y_i(s)}{V_i(s)}$ を求めると、

$$\frac{y_i(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^{\alpha_i} + \beta_{i1} s^{\alpha_i-1} + \dots + \beta_{i\alpha_i}} \quad (20)$$

係数 $\beta_{i1}, \beta_{i2}, \dots, \beta_{i\alpha_i}$ を選ぶことによって極を変えられることを示している。 H_d, G_d を次のように選ぶ。

$$H_d = \underline{H}_d^{-1} \quad (21)$$

$$(-H_d^{-1} G_d)_i = C_i A^{\alpha_i} + \beta_{i1} C_i A^{\alpha_i-1} + \dots + \beta_{i\alpha_i} C_i \quad (22)$$

ここに $(-H_d^{-1} G_d)_i$ は $-H_d^{-1} G_d$ の第 i 番目の行ベクトルを表す [4]。実際に数値を代入して求めると次式となる。

$$G'_d(s) = C(sI - A - B G_d)^{-1} B H_d \quad (23)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2+4.61s+300} & 0 \\ \frac{2.78 \times 10^{-17}}{(s^2+5.63s+9)(s^2+4.61s+300)} & \frac{1}{s^2+5.63s+9} \end{bmatrix} \quad (24)$$

ここで $\frac{2.78 \times 10^{-17}}{(s^2+5.63s+9)(s^2+4.61s+300)} \simeq 0$ といえる。これにより、非干渉化ができた。シミュレーション結果は図 3 である。

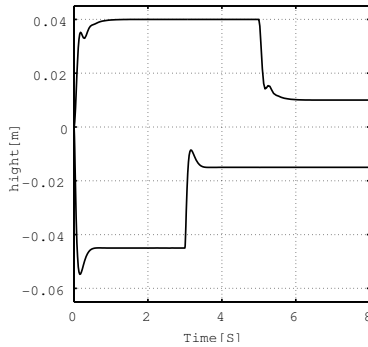


図 3 非干渉のシミュレーション

5.2 非干渉系のシミュレーションの考察

シミュレーション結果よりそれぞれに対し影響はなくなった。非干渉化は磁気浮上実験機において、有効であると考えられる。よって非干渉化法によって実機を制御することとする。

6 実験結果

実験結果を図 4, 図 5 に示す。

6.1 実験結果の考察

図 4 より、上側に step 信号を入力した時、step 信号が入った瞬間下側も少し動くが、すぐ平衡点に戻っている。シミュレーションでは全く影響はなかったが、実機では極わずかに動いた。しかし、これはシミュレーションに近いと考えられる。その理由の第一点として、その動いた量はかなり小さい事が挙げられ

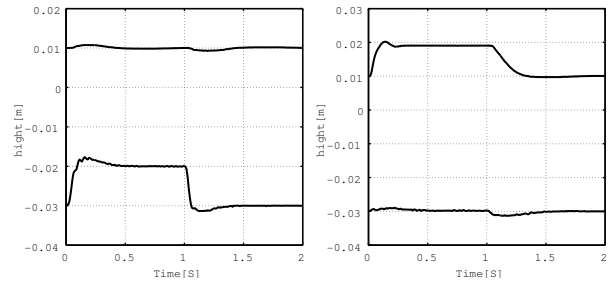


図 4 左：上側に step を入れた場合 右：下側に step を入れた場合

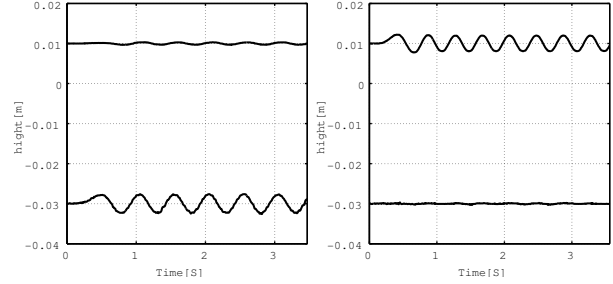


図 5 左：上側に sin を入れた場合 右：下側に sin を入れた場合

る。第二点としては下側の磁石が影響を受けてから平衡点に戻るまでの時間が早い事である。これは影響を受けて下側の磁石が平衡点からずれた時、即座にそれを修正するように制御がかかった結果だと考える。これら二点よりほとんど影響を受けていないと言って良いと考えた。次に、下側に step 信号を入力した時に関して、こちら上側に step 信号を入力したときと同様の理由により、シミュレーションに近いと考えられる。次に図 5 より上側に sin 信号を入力した時下側は微妙に動いているのがわかる。全体を通して見た時、下側の出力の動きは sin 信号に似ている。しかし、動いている量はわずかなので、ほぼ動いていないと言って良いと考える。下側に sin 信号を入力した時に関しては、上側に sin 信号を入力したときと違い、上側の出力波形は微細振動はするが、sin 信号に近い動きはしていない。また高さも一定値を保っていると言える。これより、非干渉化によって影響がなくなっていると考えられる。これらの結果より非干渉化法は有効であると言える。

7 終わりに

本研究をまとめると、非干渉化制御は 2 入力 2 出力である磁気浮上実験機において有効的な制御手法であったといえる。今後は 2 入力 2 出力だけではなく、多入力多出力システム (例えばロボットアーム) において本研究と同様に有効的な手法であるか確認したい。また、干渉系に関しては、干渉したまま制御し、それらから得られた結果と非干渉化法によって得られた結果について、深く比較検討したいと考えている。これらのことが今後の課題である。

参考文献

- [1] 石川和宏, 大橋勇太: 磁気浮上システムのモデル同定と制御の高度化, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2004)。
- [2] 岩井善太, 石飛光章, 川崎義則: 制御工学, 朝倉書店 (1999)。
- [3] 川田昌克, 西岡勝博: MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学, 森北出版 (2001)。
- [4] 白石昌武: 入門現代制御理論, 日刊工業新聞社 (1995)。
- [5] 須田信英: P I D 制御, 朝倉書店 (1992)。