

# ILQ 設計法による磁気浮上システムの制御

2002MM069 野津 裕貴

指導教員 高見 勲

## 1 はじめに

制御対象のモデリング過程において、物理法則や実験による仮定・近似により生じるモデル化誤差は避けられないものである。このモデル化誤差の存在下においても制御系の安定性が保持されるとき、その制御系はロバスト安定であるという。

最適レギュレータ (LQ) 設計法は、重みの選択によらず常に、低感度特性やロバスト安定性など実用上好ましい特徴を持っている。しかし LQ 設計法は評価関数の重みが閉ループ応答などの工学的な仕様と明確に結びついていないためその選定が難しく、それが設計の難点となっている [1]。そこで本研究では、これらの点を考慮し、LQ 設計法により従来のように重みを指定して最適制御を求めるよりも、設計パラメータと時定数を指定することにより、それが重みに関して最適であるような状態フィードバックを求める、つまり逆問題の結果を応用した ILQ 最適サーボ系設計法を用い [2]、最適レギュレータの特徴を残したままの実用上得策な設計を試みる。

## 2 制御対象

制御対象として 1 入出力の磁気浮上システムを考える。これを線形化した数学的モデルは次に示す通りである。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx, [x_1 \ x_2]^T = [z \ \dot{z}]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -128.1 & -4.603 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 \\ 2.643 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \end{aligned}$$

ただし、 $x$  は状態量、 $u$  は操作量、 $y$  は出力、 $z$  は円盤の高さ、 $\dot{z}$  は円盤の速度である。

## 3 最適サーボ系の構造

出力  $y(t)$  をステップ目標値  $r(t)$  に追従させる最適サーボ系の設計問題を考察する。ただし、この系には原点に零点をもたない、すなわち、次の行列は正則とする。

$$\Gamma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

最適サーボ系は状態フィードバックと積分補償器で構成され、状態フィードバックゲイン  $K_F$  と積分ゲイン  $K_I$  は、制御対象に積分器を付加した拡大系

$$\begin{aligned} \dot{x}_e &= A_e x_e + B_e u_e, \\ A_e &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix}, B_e = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, C_e = [C \ 0] \end{aligned} \quad (2)$$

に対して二次形式評価関数

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty (x_e^T Q x_e + u_e^T R u_e) dt, \\ Q &= C_e^T C_e, R > 0 \end{aligned} \quad (3)$$

を最小化する最適レギュレータ問題の解

$$u_e = -[K_F \ K_I] x_e := -K_e x_e \quad (4)$$

として得られ、いわゆる最適サーボ系となる。

## 4 ILQ 最適サーボ系設計法

### 4.1 ILQ 基本構造

最適制御の逆問題の結果 [3] によれば、状態フィードバック (4) が最適制御であるための必要十分条件は、ゲイン  $K_e$  に対して適当な正則行列  $V$  と  $\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\} > 0$  および適当な実行列  $K_F^0, K_I^0$  が存在して

$$K_e = V^{-1} \Sigma V [K_F^0 \ K_I^0] \quad (5)$$

$$K_F^0 B = I \quad (6)$$

が成立することである。そして、 $K_F^0$  と  $K_I^0$  から定まる次の基本ゲイン  $K$  を導入する。

$$K = K_F^0 A + K_I^0 C \quad (7)$$

これにより以下のパラメータ行列  $V, \Sigma, K$  を用いたゲイン  $K_F, K_I$  の式 (8) が得られる [3]。

$$[K_F \ K_I] = V^{-1} \Sigma V [K \ I] \Gamma^{-1} \quad (8)$$

### 4.2 設計方針

前節の結果に基づいて ILQ 設計法では、目的とする最適制御則  $K_e$  を式 (5) のように表し、それが最適になるようにパラメータ  $V, K, \Sigma$  を次の方針で決定する。

- 1)  $V$  は設計簡単化のため単位行列を選ぶ。
- 2) 基本ゲイン  $K$  は、制御系が  $\sigma_j \rightarrow \infty (j = 1, 2, \dots)$  のとき、パラメータ  $K$  のみを含む制御系に漸近することに注目して求める。つまり  $G_{yr}^\infty$  が希望の伝達関数行列になるように非干渉化理論などにより定める。
- 3)  $\Sigma = \sigma I$  と限定して、制御則  $K_e$  が最適となる条件を満たす  $\sigma_{min}$  を求め  $\sigma > \sigma_{min}$  となる範囲内で  $\sigma$  の値を選ぶ [3]。また  $\sigma$  は  $K_F, K_I$  の大きさを調整する役割をもつことからゲイン調整パラメータと呼ばれている。

<ゲインの計算方法>

$G_{yr}^\infty(s)$  が希望の伝達関数行列

$$G_{yr}^\infty(s) = \text{diag}\left\{\frac{\phi_i(0)}{\phi_i(s)}\right\} \quad (9)$$

となるための必要十分条件は、次の行列  $D$  が正則となることである。

$$D = \begin{bmatrix} c_1 A^{d_1-1} B \\ c_2 A^{d_2-1} B \\ \vdots \\ c_m A^{d_m-1} B \end{bmatrix},$$

$$d_i = \min\{k : C_i A^{k-1} B \neq 0\} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (10)$$

また、そのときのゲイン  $K$  は

$$K = D^{-1} N_\phi, N_\phi = \begin{bmatrix} c_1 \phi_1(A) \\ \vdots \\ c_m \phi_m(A) \end{bmatrix} \quad (11)$$

で得られる。ただし  $\phi(s)$  は、式 (10) で定義される制御対象の相対次数  $d_i$  と同じ次数をもつ任意の安定多項式である。そして  $\phi(s)$  を最も簡単な次の形で与える。

$$\phi_i(s) = (s - s_i)^{d_i}, \quad s_i = \frac{-1}{T_i} \quad (1 \leq i \leq m) \quad (12)$$

つまり、第  $i$  目標入力から第  $i$  出力への伝達関数を、高次 ( $d_i$  次) 遅れ系の伝達関数

$$\frac{1}{(T_i s + 1)^{d_i}} \quad (13)$$

に選び、その時定数  $T_i$  を設計仕様として与える。

以上より、ILQ 最適サーボ系を図 1 のように構成する。

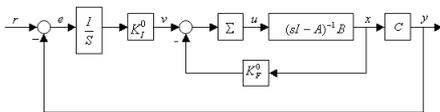


図 1 ILQ 最適サーボ系の構成

## 5 シミュレーションと実験

磁気浮上システムに対して ILQ 設計法を用いてシミュレーションを行った。式 (13) の希望伝達関数における時定数  $T = 0.5, 0.2$  のときを図 2 に示す。また、 $\Sigma$  の値は上記で求められる最小の値  $\Sigma = 58$  を用いた。次に、時定数  $T = 0.5$  のときオーバーシュートが見られたため  $\Sigma$  の値を最小の値から、 $\Sigma = 150$  とした。これによりオーバーシュートは改善された。また整定時間を短くするために時定数  $T = 0.05, \Sigma = 150$  とした。以上 2 つの波形を図 3 に示す。図 3 からわかるように、 $\Sigma$  の値を上げることでオーバーシュートもなくなり目標値応答が改善された。

そして磁気浮上システムに対して ILQ 制御系を実装した。時定数と  $\Sigma$  の値は操作量と制御量のトレードオフによっていくつか試した。その結果、シミュレーションでもよりよい応答がみられた時定数  $T = 0.05, \Sigma = 150$  のときの波形を図 4 に示す。シミュレーションの波形とほぼ一致し、実験は成功したと言える。

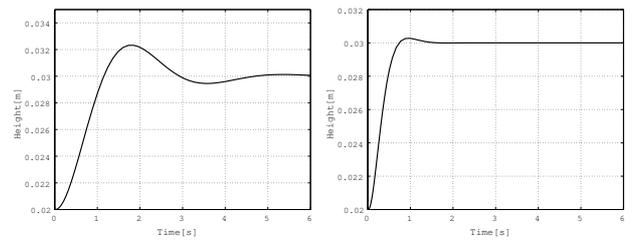


図 2 シミュレーション結果

左：時定数  $T = 0.5$ ，右：時定数  $T = 0.2$

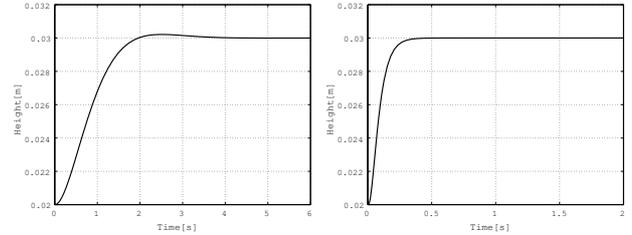


図 3 シミュレーション結果

左： $T = 0.5, \Sigma = 150$ ，右： $T = 0.05, \Sigma = 150$

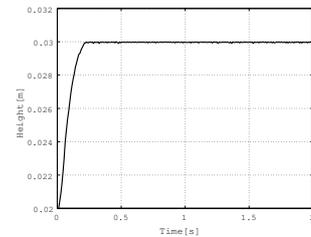


図 4 時定数  $T = 0.05, \Sigma = 150$  の時の実験結果

## 6 おわりに

ILQ 設計法では最適レギュレータのように重みの選定に悩むことなくゲインを求めることができた。これは設計パラメータと閉ループ応答との関連が明確であり、それを利用して各出力の応答波形が、操作量の大きさなどとバランスさせながら独立に指定できるためである。つまり  $G_{yr}^\infty(s)$  が希望の伝達関数になるよう時定数  $T_i$  を指定し、 $\Sigma$  の値を調節することで希望の応答が得られた。

磁気浮上システムへの実装には調整パラメータ  $\Sigma$  を操作量と制御量のトレードオフによって決定した。その際  $\Sigma$  を大きくすると出力  $y$  は指定した出力応答波形に漸近するが、操作量  $u$  が一般に大きくなる。そのため、両者の妥協をはかりながら  $\Sigma$  の適切な値を決定しなければならない。

## 参考文献

- [1] 藤井, 下村: ILQ 最適サーボ系設計法の一般化, システム制御情報学会論文誌, Vol.1, No.6, pp.194-203 (1988).
- [2] 黒江, 安部, 藤井: 参照入力を一般化した ILQ 最適サーボ系設計法, 計測自動制御学会論文誌, Vol.32, No.4, pp.539-546 (1996).
- [3] 木村英紀, 藤井隆雄: ロバスト制御, コロナ社 (1994).