

部分モデルマッチングを用いたPID制御設計

2002MM034 岩井 陽

指導教員 高見 勲

1 はじめに

実制御対象は一般に物理システムであり無数のエネルギー蓄積要素などを含んでおりその動特性の次数は本来無限次元である。したがってその自由度を全て補償する完全補償は不可能であると考えられている。しかし部分的補償によって自由度を補償することは可能である。部分的補償を行う際制御対象の伝達関数の低次元の項に着目して制御設計を施す。理由として低次元の項は高次の項に比べて大きな影響力があり [1], それを補償することで制御対象自由度を補償することができるからである。本論文では実制御対象に三慣性システムを用いる。また制御手法においては部分モデルマッチングPID制御を用いる。更に制御対象の伝達関数の近似化をはかり制御する上での簡略化も目指す。

2 制御対象

図1に三慣性システム概念を示す。ここで図1において

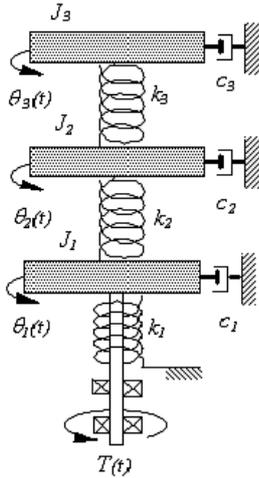


図1 三慣性システム

$T(t)[N \cdot m]$ は操作トルク, $J_n(n=1,2,3)[kg \cdot m^2]$ は慣性モーメント, $c_n(n=1,2,3)[N \cdot m/rad/s]$ は粘摩擦係数, $k_n(n=1,2,3)[N \cdot m/rad]$ はバネ係数, $\theta_n(n=1,2,3)[rad]$ は変位角とそれぞれを表している。三慣性システムに対する線形化した数式モデルを下に示す。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

$$y = Cx \quad (2)$$

$$x = [\theta_1 \quad \dot{\theta}_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_2 \quad \theta_3 \quad \dot{\theta}_3]^T \quad (3)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{21} & -a_{22} & a_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & -a_{43} & -a_{44} & a_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a_{63} & 0 & -a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$B = [0 \quad 1/J_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (5)$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (6)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{k_1}{J_1}, a_{22} = \frac{c_1}{J_1}, a_{23} = \frac{k_1}{J_1} \\ a_{41} &= \frac{k_1}{J_2}, a_{43} = \frac{k_1 + k_2}{J_2}, a_{44} = \frac{c_2}{J_2}, a_{45} = \frac{k_2}{J_2} \\ a_{63} &= \frac{k_2}{J_3}, a_{65} = \frac{k_2}{J_3}, a_{66} = \frac{c_3}{J_3} \end{aligned}$$

MATLAB/Simulink^{*1}を用いてラプラス変換 [1] すると下式を得る。

$$G(s) = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + b_4s^4}{a_1s + a_2s^2 + a_3s^3 + a_4s^4 + a_5s^5 + s^6} \quad (7)$$

$$a_1 = 7.8 \times 10^6, a_2 = 5.0924 \times 10^6, a_3 = 1.593 \times 10^4$$

$$a_4 = 5472, a_5 = 3.911, b_0 = 1.509 \times 10^{10}$$

$$b_1 = 1.698 \times 10^7, b_2 = 3.056 \times 10^7, b_3 = 7737$$

$$b_4 = 6963$$

3 三慣性システムに対する近似化

3.1 分母系列化表現

伝達関数は一般に分母多項式と分子多項式から成り立っているが約分をしてもステップ応答形状は変わらない.[3][4]. 分母系列化表現とは伝達関数の分母多項式を分子多項式で昇べきに割り算し分母多項式のみで表現するという手法である。分母系列化表現をすることによって制御設計をする際に伝達関数が分母, 分子多項式から成り立っている時よりも分母多項式のみで表現されているときの方が設計が容易である。ここで式 (7) に対して分母系列化表現を行うと,

$$G(s) = \frac{1}{a'_1s + a'_2s^2 + a'_3s^3 + a'_4s^4 + a'_5s^5 + a'_6s^6 + \dots} \quad (8)$$

$$a'_1 = 5.16 \times 10^{-4}, a'_2 = 3.50 \times 10^{-4}, a'_3 = 1.05 \times 10^{-6},$$

$$a'_4 = 3.62 \times 10^{-7}, a'_5 = 2.59 \times 10^{-10}, a'_6 = 6.62 \times 10^{-11}$$

と変換することができる。

3.2 近似化

式 (8) の各項の係数を比較すると, 低次の項の係数に比べて高次の項の係数は限りなく微小であり高次の項を省いても制御対象の伝達関数に対してあまり影響がないと考えられる。そこで (8) において式 (9),(10) のように 6 次から 4 次, 2 次への近似化を試みる。実際に式 (8),(10) に対してステップ応答 (ここでは伝達関数に積分特性があるのでインパルス応答) を入れ実際に伝達関数に対して影響がないかを調べその結果を図2に表す。結果式 (8) の波形は振動的な波形ではあるが式 (10) の波形と同じような波形をしており高次の項を省いても影響がないと言える。

$$G_1(s) \cong \frac{1}{a'_1s + a'_2s^2 + a'_3s^3 + a'_4s^4} \quad (9)$$

$$G_2(s) \cong \frac{1}{a'_1s + a'_2s^2} \quad (10)$$

*1 MATLAB/Simulink は米国 the Math work 社の登録商標

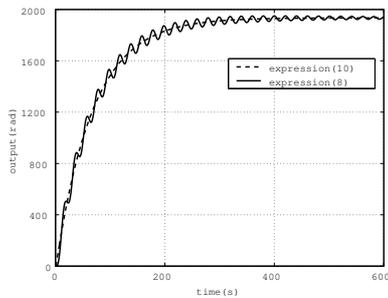


図2 インパルス応答

4 部分モデルマッチングとPID制御設計

4.1 部分モデルマッチング

部分モデルマッチングとは望ましい制御系の伝達関数を与え実際の制御対象の伝達関数の分母多項式の低次元の項からマッチングさせる方法である。利点は制御対象の次元が無限であっても低次の項を補償することによって制御対象を補償できることである。

4.2 PID制御

PID制御設計は現在多くの産業界において制御ループの約9割以上で使用されている手法である。利点は

1. 制御系が比例、積分、微分ゲインのみの設定である
2. 各パラメータの調節が用意である
3. 制御系が単純であるため実装が容易

が挙げられるがPID調節器の伝達関数が

$$C(s) = \frac{K_I + K_P s + K_D s^2}{s} \quad (11)$$

とあらわすことができ、理解しやすいと考えられる。今回三慣性システムに対してP-D制御設計を行いそのP-D制御設計の手順を以下に示す。あるモデルの伝達関数を

$$P(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_0} \quad (12)$$

としP-D制御のコントローラは

$$u(s) = k_P e(s) - k_D s y(s) \quad (13)$$

と表すことができ目標値 $r(s)$ から制御量 $y(s)$ への伝達関数は

$$G_{yr}(s) = \frac{b_0 k_P}{s^2 + (a_1 + k_P)s + a_0 + b_0 k_P} \quad (14)$$

となる。これを2次の規範モデル

$$G_M(s) = \frac{K_1 \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2} \quad (15)$$

(ω_n : 固有角周波数, ζ : 減衰係数)とマッチングするには

$$k_P = \frac{\omega_n^2 - a_0}{b_0}, k_D = \frac{2\zeta \omega_n - a_1}{b_0} \quad (16)$$

と選べばよい。以上の事を式(10)に当てはめ各コントローラを決定する。

5 シミュレーション, 実験結果

実際に各パラメータを導出しシミュレーション, 実験を行いその結果を図3に表す。シミュレーション結果の波形と実験結果の波形を比較してみると実験結果の波形は立ち上がり時間が遅く, またシミュレーションの波形よりオーバーシュートしている。しかしその誤差は微小であり収束時間もほぼ同じであり目標値に追従しているの十分に目的を満足している。よって近似化が妥当であると言える。

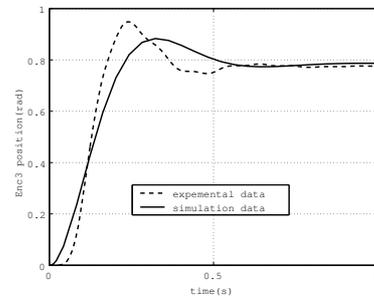


図3 シミュレーション, 実験結果

6 考察

三慣性システムにおいて近似化されたそれぞれの極を求めると

$$\begin{aligned} \omega_{n1} &= 0, -1.473 \\ &\quad -0.405 \pm 64.9092j \\ &\quad -0.811 \pm 35.3987j \\ \omega_{n2} &= 0, -1.473 \\ &\quad -0.713 \pm 31.0618j \\ \omega_{n3} &= 0, -1.473 \end{aligned}$$

と求められ3式に共通な極 $\omega_c = 0, -1.473$, 類似した極 $\omega_r = -0.811 \pm 35.987j, -0.713 \pm 31.0618j$ と分けられる。ここで伝達関数の極における支配極, 準支配極について考える。支配極とは伝達関数の応答に最も影響を与える極であり, 準支配極はその次に影響を与える極である。よって $\omega_c = 0, -1.473$ が支配極となり $\omega_r = -0.811 \pm 35.987j, -0.713 \pm 31.0618j$ が準支配極であると考えられる。三慣性システムにおいてその伝達関数を6次から4.2次へ近似化しても支配極 ω_c が残るのでその応答はほぼ一致することとなり近似化が可能であると言える。

7 おわりに

本論文では無限次元または高次元な制御対象に対してどのように補償すべきかを考えてきたが伝達関数の低次元の項を補償し理想的なモデルに近づけ部分的補償を行った。更には設計をする上での伝達関数の近似化をし従来よりもより簡略に設計をはかりこの方法を三慣性システムに適用し実験によりその有効性を検証した。

参考文献

- [1] 北森俊行: I-PD制御方式の原理と設計法, 計測自動制御学会論文集, Vol.42, No.1, pp.7-17 (1998).
- [2] 川田昌克, 西岡勝博: MATLAB/Simulinkによるわかりやすい制御工学, 森北出版 (2001)
- [3] 須田信英: PID制御, 朝倉書店 (1992).
- [4] 須田信英: PID制御則について, 計測自動制御学会論文集, Vol.42, No.1, pp.2-6 (1998).