倒立振子の最適制御

2002MM030 石橋　賢士

指導教員　高見　勲

1　はじめに

本研究は倒立振子モデル５０５を最適レギュレータによる状態フィードバックを行い、安定化を図り、有効性を確かめる。また、応答改善を繰り返し、速応性かつ、外乱に強い制御を行う事を目標とする。現在、制御技術はロボットの複雑な位置決め操作を可能にしている。また、倒立振子は扱いやすく、結果も比較的安易に得ることができるので、最適レギュレータ理論の検証に適したものであるといえる。本研究を通し最適レギュレータの実用性を確かめる。

2　制御対象

2.1　状態方程式の導出

制御対象は倒立振子５０５モデルを選び、これを線形化した数学的モデルは次に示す通りである。状態量を $z(t)$、バランスロッドの角度を $\theta(t)$、角速度を $\dot{\theta}(t)$、スライディングロッドの中央から重心までの長さを $x(t)$、スライディングロッドの速度を $\dot{x}(t)$、操作量は $F(t)$ で表す。

$\dot{z}(t) = Az(t) + BF(t)$

$y(t) = Cz(t)$

$$z(t) = \begin{pmatrix} \theta(t) & \dot{\theta}(t) & x(t) & \dot{x}(t) \end{pmatrix}^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ -14.010 & 0 & 56.570 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \\ 14.420 & 0 & -18.670 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -8.943 \\ 0 \\ 7.582 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また可制御行列はフルランクであり、可制御である。

3　制御手法

3.1　最適レギュレータの設計方法

最適レギュレータ理論では、与えられた重み $Q = Q^T \geq 0$, $R > 0$ に対して、評価関数

$$J = \int_0^\infty (z(t)^T Q z(t) + RF(t)^2) dt \qquad (1)$$

を最小化するような状態フィードバックゲイン K を求める。評価関数 (1) 式を最小化するフィードバックゲイン K は一意に定まり

$$K = -R^{-1}B^T P \qquad (2)$$

で与えられる。ただし、P はリカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \qquad (3)$$

の正定対称解である。

また、実際に重み Q, R を次のように与える。

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix} \quad (q_1, q_2, q_3, q_4 \text{は適宜指定})$$

$R = 1$

3.2　シミュレーションと制御実験

1. 実験.1 q_1, q_2, q_3, q_4=0.3 とする。シミュレーション結果、実験結果を図 1 に示す。
2. 実験.2 q_1=1000,q_2, q_3, q_4=0 とする。シミュレーション結果、実験結果を図 2 に示す。

q_1, q_2, q_3, q_4=0.3, シミュレーションと実験結果

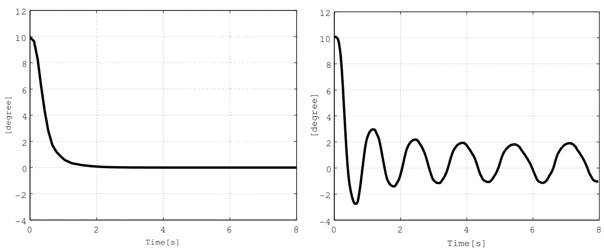

図 1　左：シミュレーション，右：実験結果

q_1=1000,q_2, q_3, q_4=0, シミュレーションと実験結果

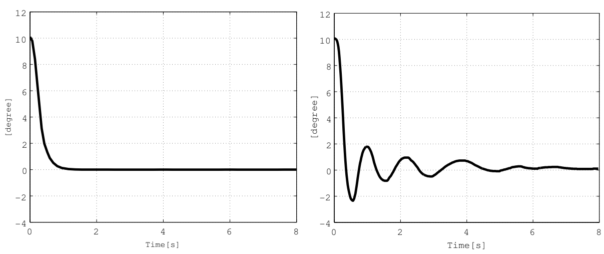

図 2　左：シミュレーション，右：実験結果

3.3　実験 1、実験 2 について

実験 1 の場合、シミュレーションでは好ましい結果を得られることできたが、実験を行うと、シミュレーションの結果のように好ましい結果が得られなかった。

実験 2 の場合、シミュレーションに近い実験結果を導き

出すことができたのは、倒立振子は角度を制御する実験器具であるので q_1 だけに重みを入れることにより誤差がなくなり、より良い結果が得られたと考えられる。

3.4 バックラッシュ

バックラッシュとは、駆動側の歯車が方向をかえるとき、出力側の歯車があそびのために駆動側の歯車の動きにかかわらず、その位置で停止していることをバックラッシュという。
バックラッシュを導入したシミュレーション結果と実験結果を図 3 示す。

3.5 バックラッシュを用いたシミュレーション

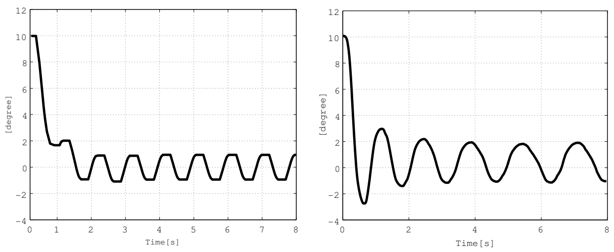

図 3　左：バックラッシュを導入したシミュレーション結果

右：実験結果１

3.6 考察

バックラッシュを導入したたシミュレーションでは自励振動が見られる。これはリミットサイクルと呼ばれる現象であり、リミットサイクルが生じると、ハードの摩擦や騒音が起こり、故障の原因となるため、これをできるだけ小さくする必要がある。

また実験１とバックラッシュを導入したシミュレーションを比較すると、実験１の周期は 1.6[s]、振幅は 2.9[degree] で、バックラッシュを導入したシミュレーションの周期は 1.7[s]、振幅は 2.2[degree] であり、ほぼ近似することができた。

これより、実験１のように好ましくない結果が得られたのは、スライディングロッドを滑らせるスライディングベルトの歯車による「あそび」と摩擦の影響であるといえる。実験１のシミュレーションは実験２のシミュレーションに比べ振幅が大きいことがわかる。これより実験１のシミュレーションの方が「あそび」の影響が大きいことがわかる。

3.7 評価関数の考察

本研究は速応性かつ、外乱に強い制御を行う事を目標としている。重みによる評価関数の比較を数値に表したものを**表 1** に示す。

また、立ち上がり時間、遅れ時間はシミュレーション結果の図から容易に求められるが、特性代表根として１対の複素共役根を選んで２次系で近似することができる。ステップ応答の特性値の計算式を以下に示す。

立ち上がり時間の近似式

$$T_r \approx \frac{2.16\zeta + 0.6}{w_n} \tag{4}$$

遅れ時間の近似式

$$T_d \approx \frac{0.7\zeta + 1}{w_n} \tag{5}$$

特性代表根の固有角周波数が近似式の条件 $(0.3 \leq \zeta \leq 0.8)$ を満たしていれば、ステップ応答の特性値の計算式 (4),(5) から立ち上がり時間、遅れ時間を近似する事ができる。実験１, ２の場合も、ζ=0.51,0.63 で条件を満たしているため立ち上がり時間、遅れ時間を近似することができる。(4),(5) の計算式に減衰比、固有角周波数を代入すると実験１は T_r=0.728,T_d=0.68、実験２は T_r=0.375,T_d=0.34 となり近似できる。また、 $(0.3 \leq \zeta \leq 0.8)$ が条件であるが、ζ=0.3,0.8 の時はほとんど近似できない状態であり、ζ=0.6 に近い値ほど近似できることも分かった。条件を満たしていない場合は全く近似できなかった。

表１　重みによる評価項目の比較

指標	q_1,q_2,q_3,q_4=0.3	q_1=1000
極	$-3.64 \pm 6.14i$	$-5.31 \pm 0.38i$
減衰比 ζ	0.51	0.63
固有角周波数	7.14	17.1
ゲイン	5.8075 2.0201 17.3527 4.2503	44.2666 16.2435 120.4932 23.4033
立ち上がり時間 [s]	0.8	0.38
遅れ時間 [s]	0.72	0.36

4 おわりに

倒立振子のもつ非線形特性をバックラッシュの導入により非線形特性を考慮したが、振幅、周期共に近似することができなく苦労した。しかし、最終的に近似することができた。また、評価関数についても、ステップ応答でない場合にも近似式を導入し近似することに成功した。

参考文献

[1] モデル５０５マニュアル倒立振子システム
[2] 岩井善太、石飛光章、川崎義則：「制御工学」朝倉書店 (2002).
[3] 川田昌克、西岡勝弘：「MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学」森北出版 (2001).
[4] 平井一正：「非線形制御」コロナ社出版　(2003).
[5] 足立修一：「制御工学」東京電気大学出版　(2003).
[6] 東方希容子：「オブザーバを用いた倒立振子の最適制御」南山大学数理情報学部数理科学科論文　(2004).