

カルマンフィルタを用いた倒立振子の制御

2000MM031 影山 夏樹

指導教員 高見 勲

1 はじめに

現在、カーナビゲーションシステムのGPS測位、ロケットやヘリコプターといった航空・宇宙制御、身近に感じる所では天気予報など幅広い分野でカルマンフィルタ(状態観測器)は利用されている。

本研究では、フィードバック制御系設計手法として最適レギュレータを採用するので、これと同じ形式、即ち評価関数が2次形式でリカッチ方程式を解くことにより最適ゲインが求められるカルマンフィルタを同一次元オブザーバの設計手法として採用する。そして、MATLAB/Simulink^{*1}でカルマンフィルタと最適レギュレータによる状態フィードバックを併用した制御(LQG制御)を行い、この性能を評価し有効性を確かめたいと思う。実験機(制御対象)は倒立振子モデル505を使用する。

2 制御対象

制御対象は、DCサーボモーター、高分解能エンコーダ、低摩擦スライディングバランスロッド、調節可能な荷重から成る倒立振子である[1]。

状態量を $x(t)$ 、バランスロッドの角度を $\theta(t)$ 、角速度を $\dot{\theta}(t)$ 、スライディングロッドの中央から重心までの長さを $z(t)$ 、スライディングロッドの速度を $\dot{z}(t)$ で表す。制御量はバランスロッドの角度 $\theta(t)$ 。操作量は $u(t)$ でバランスロッドの回転トルク(スライディングロッドの長さを調節するトルク)である。

倒立振子モデルは複雑な力学系であり、制御対象の状態方程式を求めるのに、ラグランジェの運動方程式を利用する。これによって、下式の状態方程式を得た。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(t) &= \begin{pmatrix} \theta(t) & \dot{\theta}(t) & z(t) & \dot{z}(t) \end{pmatrix}^T \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & 1.000 & 0 & 0 \\ -14.010 & 0 & 56.570 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.000 \\ 14.420 & 0 & -18.670 & 0 \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ -8.943 \\ 0 \\ 7.582 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また、システムは可制御、可観測であることを確認している。

3 最適レギュレータ

最適レギュレータ理論では、可制御である状態方程式に対して評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (x(t)^T Q x(t) + R u(t)^2) dt$$

を導入し、これを最小化するような状態フィードバックゲイン K を求める。ここでの Q は正定または半正定対称行列、 R は正定対称行列でそれぞれ評価の重みである。この J を最小にする最適制御入力

$$u(t) = Kx(t), K = -R^{-1}B^T P$$

となる。ここで P はリカッチ方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

を満たす唯一の正定対称解(すなわち $P = P^T > 0$)である[2]。今回、最適レギュレータを用いる際には重み Q, R を次のように与える。 q_1, q_3 は適宜指定する。

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ R = 1$$

4 カルマンフィルタ

4.1 状態観測器

状態フィードバックの設計では、すべての状態変数が測定できるものとして考えてきた。しかし、実際の現場ではむしろそのような場合は非常に少なく、測定可能な入力変数や出力変数を用いて必要な内部の状態変数を推定せざるを得ない場合が多い。そこで、本研究では同一次元オブザーバとしてカルマンフィルタを用いる。

カルマンフィルタとは、システムの入力信号や出力信号に不規則性な外乱(雑音)も同時に含まれてしまう時にその外乱の影響をなるべく少なくしようとする最適なオブザーバの設計方法をカルマンフィルタという[3]。

4.2 定式化

状態変数を測定したい制御対象を

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + v(t) \\ y(t) &= Cx(t) + w(t) \end{aligned}$$

とする。これに対するカルマンフィルタは、

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}}(t) &= (A - LC)\hat{x}(t) + Ly(t) + Bu(t) \\ &= A\hat{x}(t) + Bu(t) - LC(\hat{x}(t) - x(t)) \\ &= (A - LC + BK)\hat{x}(t) + Ly(t) \end{aligned}$$

となる。 $v(t), w(t)$ はそれぞれ入力時、観測時に加わる雑音で、白色雑音である。これは自己相関及び両者間の相互関係がなく、次の性質で表現される。

$$\begin{aligned} E[v(t)] &= E[w(t)] = 0, \quad E[v(t)w^T(\tau)] = 0 \\ E[v(t)v^T(\tau)] &= Q\delta(t - \tau), \quad Q \geq 0 \\ E[w(t)w^T(\tau)] &= R\delta(t - \tau), \quad R > 0 \end{aligned}$$

$\delta(t)$ はディラックのデルタ関数である。このようなシステムに対して、観測データをもとに全ての状態変数 $x(t)$ の推定値 $\hat{x}(t)$ を求める場合、評価関数

$$J = E\{[x(t) - \hat{x}(t)]^T [x(t) - \hat{x}(t)]\}$$

を最小にするフィードバックゲイン L を決定する。レギュレータ問題と同様で最適フィルタゲインは $t \rightarrow \infty$ で $L = PC^T R^{-1}$ と与えられる。

これは、リカッチ方程式で正定対称な解 P (推定誤差共分散)を求めることで得られる。実際にMATLABでフィルタゲイン

^{*1} MATLAB/Simulink は米国 MathWorks 社の登録商標です。

L を求めるには、システムノイズ Q と観測ノイズ R の共分散行列をオブザーバの極がレギュレータの極よりも左になるように設計する。 $q_1, q_2, q_3, q_4, r_1, r_2$ は適宜指定し、 Q と R はそれぞれ

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

となる。

5 LQG 制御のシミュレーション及び実験

3節で述べた最適レギュレータの重みを $q_1 = q_3 = 5000$ とするとレギュレータの極は、

$$-19.7486 \pm 20.9990j, -4.5088 \pm 1.4335j$$

となる。この時、観測ゲイン行列の重みを以下のようにしてみた。

$q_1 = 1, q_2 = 1000, q_3 = 0.0001, q_4 = 68, r_1 = 0.001, r_2 = 0.0001$ とすると推定器の極は、

$$-27.2682 \pm 15.9951j, -20.0862 \pm 20.5754j$$

となる。このシミュレーション結果を図 1 に、実験結果を図 2 に示す。

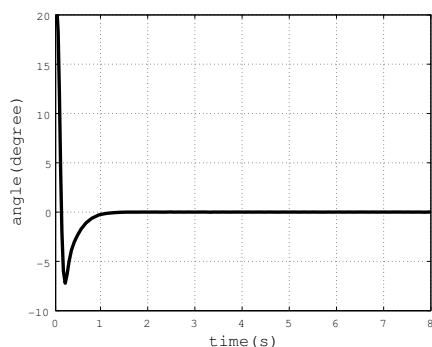


図 1 シミュレーション結果

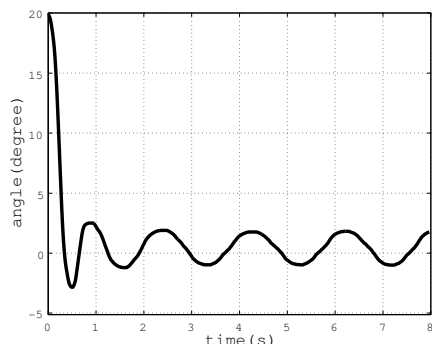


図 2 実験結果

同様に、最適レギュレータの重みを $q_1 = q_3 = 10000$ とするとレギュレータの極は、

$$-23.6943 \pm 24.7464j, -4.5105 \pm 1.4353j$$

となる。

この時、観測ゲイン行列の重みを $q_1 = 1, q_2 = 1200, q_3 = 0.0001, q_4 = 140, r_1 = 0.001, r_2 = 0.0001$ とすると推定器の極は、

$$-28.1413 \pm 17.4356j, -24.1231 \pm 24.5365j$$

となる。このシミュレーション結果を図 3 に、実験結果を図 4 に示す。

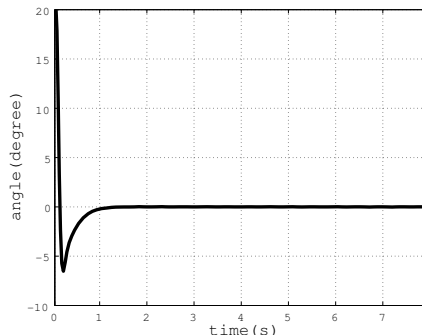


図 3 シミュレーション結果

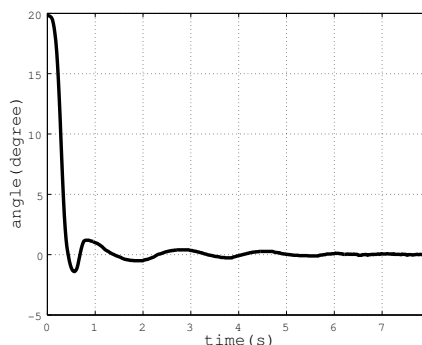


図 4 実験結果

5.1 考察

図 1、図 2 の結果を比較すると、実験結果では倒立振子がふらつく現象(リミットサイクル)が見られたが、シミュレーションと同じくらい整定時間も早く応答は良いものであった。このリミットサイクルを少しでも改善しようとしたシミュレーション結果と実験結果が図 3、図 4 である。図 1、図 2 の結果と図 3、図 4 の結果を比較すると、シミュレーション結果はほぼ同じであるが、実験結果ではリミットサイクルも無く、応答も早く上手く制御できたと言える。これは、最適レギュレータのゲインを大きくしたために上手く制御できたと考えられる。

6 終わりに

カルマンフィルタのゲイン行列を求めるのに、カルマンフィルタの原点に近い極がレギュレータの極よりも原点に近くなってしまふ。これを改善することができ、カルマンフィルタと最適レギュレータを用いた制御手法で倒立振子を制御することができた。また、この理論の有効性をシミュレーション及び実験で確認することができた。

参考文献

- [1] モデル 505 マニュアル, ECP
- [2] 川田昌克, 西岡勝博:「MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学」, 森北出版 (2001).
- [3] 白石昌武:「入門現代制御理論」, 日刊工業新聞社 (2003).