2,3,4 次代数方程式の数値解法

2002MM112 油科 亮太
指導教員　杉浦 洋

1　はじめに

本研究では，4 次以下の代数方程式の数値解法を研究する．扱う代数方程式は複素変数 x，複素係数 a_i を持ったもので

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0 \quad , \quad a_n = 1. \tag{1}$$

なお，a_i のように記号に何も付いていないものは誤差を含まない真値を表し，a_i' のように $'$(ダッシュ) が付くものは誤差を含んだ値とする．

2 次方程式の根の公式, 3 次方程式の Cardano 法といった公式をそのまま使って方程式を計算機に解かせると，得られる数値解は精度が悪い．これは，本来，数学公式が数値を無限桁の小数として扱うことを前提に理論が組まれているため，有限桁しかを扱うことができない計算機には適さない部分があるためである．

そこで，各公式を用いて極端な精度の劣化を防いだ数値解法 [1] の有効性を，事前の誤差解析，プログラムによる実験によって調べる．

2　誤差の評価

真値 x に対する近似値を x' としたとき，x に対する誤差の割合 $(x'-x)/x$ を相対誤差という．

最も基本的な誤差は，計算機が値をメモリに保存するときに行う，丸めという操作で発生する丸め誤差で，相対誤差 ε は $|\varepsilon| \le u$ を満たす．u は丸めの単位といい計算機固有の定数である．

x の相対誤差が η のとき，

$$x' = x(1+\eta) = x(1+m\varepsilon)$$

と表せ，m を誤差係数と呼び，近似値 x' の相対誤差は真値 x を丸めたときの相対誤差を m で拡大したものと考えることができる．

2.1　誤差の事前評価

演算による誤差を事前に調べる方法がある．例えば，実数 a, b を入力して減算する処理全体の誤差を考える．

まず，a, b は入力で丸められるため，メモリ内では近似値 a', b' となる．そのため，計算機は $a-b$ ではなく $a'-b'$ を行う．$\varepsilon_a, \varepsilon_b$ は a', b' の丸めの相対誤差，ε_1 は減算による相対誤差とすれば

$$\begin{aligned}(a'-b')' &= \{a(1+\varepsilon_a) - b(1+\varepsilon_b)\}(1+\varepsilon_1) \\ &= (a-b)\left(1+\varepsilon_1+\frac{a}{a-b}\varepsilon_a-\frac{b}{a-b}\varepsilon_b\right)+O(u^2)\end{aligned}$$

となり，相対誤差は $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ にも依存する．特に $a \cong b$ ならば $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ にかかっている係数が大きくなるので，相対誤差が大きくなることが分かる．

2.2　複素数の誤差評価

複素数演算は複素数積

$$(a+ib)\times(c+id) = (ac-bd)+i(ad+bc)$$

のように，実数演算が数回必要になる．

そこで厳密な誤差解析を行い，複素数演算の誤差係数は表 1 を越えないことを証明した．

表 1: 複素数演算の誤差係数

演算	誤差係数
加減算	1
乗算	$m_p = 2.309\cdots$
除算	$m_d = 4.819\cdots$
平方根	$m_s = 3.041\cdots$

3　残差基準による近似解の妥当性

現実には真解 x_0 は不明なので，得られた数値解 x_0' が本当に近似解なのか確かめられない．そのため x_0' を近似解として認めて良いという判断基準が必要になる．

計算機は (1) ではなく，丸められた係数 $a_i' = a_i(1+\varepsilon_i)(|\varepsilon_i| \le u)$ を持った近似方程式

$$\hat{f}_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i' x^i = f_n(x) + \sum_{i=0}^{n} a_i \varepsilon_i x^i = 0$$

を解く．真解 x_0 で残差を見ると，$f_n(x_0) = 0$ なので

$$|\hat{f}_n(x_0)| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i \varepsilon_i x_0^i\right|.$$

ここで，多項式 $f_n(x)$ の係数を絶対値にした多項式を $|f_n|(x)$ と定義すれば

$$|\hat{f}_n(x_0)| \le |f_n|(|x_0|)u.$$

よって

$$\frac{|\hat{f}_n(x_0)|}{|f_n|(|x_0|)} \le u \tag{2}$$

となり，数値解 x_0' が真解 x_0 同様に (2) を満足すれば近似解として妥当だといえる．ところが計算機は $\hat{f}_n(x)$ しか計算できないので，実際には (2) の左辺の分母は $|\hat{f}_n|(x)$ を使う．また，求解の過程で演算による誤差があるので，(2) を安全係数 K で緩和した

$$\frac{|\hat{f}_n(x_0')|}{|\hat{f}_n|(|x_0'|)} \le Ku \tag{3}$$

を満足すれば，残差基準を満たしているといい，近似解として妥当だとする．

数値解と共に (3) の左辺を計算して，不等式 (3) を満たさないなら近似解として認められない．

4　関数の原点移動

本研究で扱う方程式の解法は，最初に $f_n(x)$ の適当な次数の係数を 0 にする原点移動 $x = y + \sigma$ を行い $g_n(y)$ をつくる．

このとき次の定理が成り立つ．

定理 1 $f_n(x_0) = 0, g_n(y_0) = 0$ として，

$$\text{迂回率}:\frac{|y_0| + |\sigma|}{|x_0|} \leq k \text{ のとき}$$
$$\frac{|\hat{g}_n(y_0')|}{|\hat{g}_n|(|y_0'|)} \leq K_y u \Longrightarrow \frac{|\hat{f}_n(x_0')|}{|\hat{f}_n|(|x_0|')} \leq k^n K_y u.$$

つまり近似解 y_0' が安全係数 K_y の残差基準で満足すると x_0' は安全係数 $k^n K_y$ を満足したことになる．

5　2 次方程式

2 次方程式 $f_2(x) = 0$ は，まず 1 次係数を消去する原点移動 $x = y + \mu$ を行う．2 つの解 x_1, x_2 のうち絶対値が大きい方の迂回率は $\sqrt{2}$ で抑えられるが，小さい方は抑えることができない．そのため定理 1 より，小さい方の解は残差基準が定まらない．

そこで x_2 は 0 次係数と解の関係 $x_1 x_2 = a_0$ で求め，近似解は

$$x_1' = x_1 \{1 + (2 + m_s + 1/2D)\,\varepsilon\}$$
$$x_2' = x_2 \{1 + (3 + m_d + m_s + 1/2D)\,\varepsilon\}$$

となる．

D は変数変換後の方程式を解くときの演算誤差をまとめたもので，x_1, x_2 が近接してる程大きくなる．

6　3 次方程式 - Cardano 法

3 次方程式 $f_3(x) = 0$ の解法で，最初に原点移動を行い適当な次数の係数を 0 にする解法を Cardano 法という．

通常 2 次係数を 0 にする方法が説明されているが，それでは，3 つの解 x_1, x_2, x_3 のうち 2 つの解の迂回率が定まらない．

[1] では 1 次係数を 0 にする方法を採用している．これだと 2 つの解に対して迂回率が定まり，残りの解は 0 次係数と解の関係 $x_1 x_2 x_3 = -a_0$ から求めることができる．

1 次係数を 0 にした方程式 $g_3(y) = 0$ を $z = 1/y$ で変数変換した方程式 $h_3(z) = 0$ は，2 次係数を 0 にした場合の方程式と同形になるので後は通常の Cardano 法と同じ手順で解ける．

なお変数変換 $y = 1/z$ を行うとき残差基準への影響はない．

$h_3(z) = 0$ の解 $z_1, z_2, z_3 (|z_1| \geq |z_2| \geq |z_3|)$ の近似解は

$$z_1' = z_1 \{1 + (1 + m_d + Z_1)\varepsilon\}$$
$$z_2' = z_2 \{1 + (1 + m_d + Z_2)\varepsilon\}$$
$$z_3' = z_3 \{1 + (1 + 2m_d + m_p + Z_1 + Z_2)\varepsilon\}$$

となる．Z_1, Z_2 は変数変換後の演算誤差をまとめたもので，解が近接すると大きくなる．

7　実験結果

実際にプログラムを作成して相対誤差と解の近接具合の関係を確認する．

真解 x_1, x_2, x_3 は次の条件を満たすように乱数で作成した．

$$x_1 = 1\ ,\ |x_2 - x_1| = 10^{m_1}\ ,\ |x_3 - x_1| = 10^{m_2}.$$

m_1, m_2 は x_1 との近接度で $-16 \leq m_1, m_2 \leq 16$ とした．

実験は同じ近接度でいくつか方程式を作り，その数値解を求め，最大相対誤差の常用対数 r_{max} と m_1, m_2 の関係を調べた．

図 (1) は 2 次方程式の解の近接度と相対誤差の関係で，m_1(横軸) が小さい程 r_{max}(縦軸) が大きくなっている．

図 (2) は 3 次方程式の場合である．色の濃淡が r_{max} を表しており，色が淡いほど r_{max} が大きい．横軸は m_1，縦軸は m_2 で，共に小さい程 r_{max} が大きくなっている．

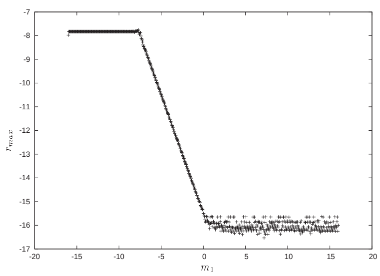

図 1: 2 以方程式の解の近接度と相対誤差

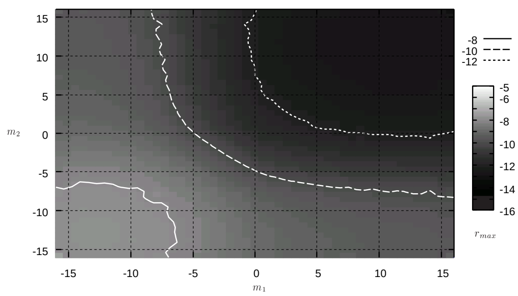

図 2: 3 次方程式の解の近接度と相対誤差

8　おわりに

相対誤差，残差基準の面から [1] が有効であることが理解できた．今後の課題として，4 次方程式へと話を進める．

参考文献

[1] 平野菅保：浮動小数点演算による代数方程式の数値解法 (1980).