二重指数型変数変換による二次元無限積分

2002MM057 水野　雄太

指導教員　杉浦 洋

1　はじめに

一変数緩減少関数の無限積分では二重指数関数型公式 (DE 公式) が有効である．しかしそれを二変数関数の無限積分に直積型で用いると大幅にその効果が落ちる．二重指数型変数変換公式, もしくは積分公式を改良し二変数関数の無限積分を高精度で行うのが本研究の目的である．

2　一変数関数の積分

2.1　半無限区間積分と無限区間積分

一変数関数 f の無限積分に対する無限台形則は

$$I^h f = h\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh) \cong \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

区間 (a,b) 上の定積分については適当な変数変換で

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

と急減少な関数の無限積分に変換してから無限台形則を用いる．変数変換に用いる二重指数型変数変換は次のものである．

1. 半無限区間積分 $(a,b)=(0,\infty)$

$$\varphi(t) = \exp(\frac{\pi}{2}\sinh t),$$

$$\varphi'(t) = \frac{\pi}{2}(\cosh t)\exp(\frac{\pi}{2}\sinh t). \qquad (1)$$

2. 無限区間積分 $(a,b)=(-\infty,\infty)$

$$\varphi(t) = \sinh(\frac{\pi}{2}\sinh t),$$

$$\varphi'(t) = \frac{\pi}{2}(\cosh t)\cosh(\frac{\pi}{2}\sinh t). \qquad (2)$$

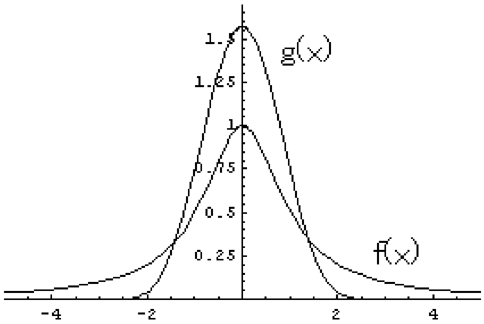

図 1　f(x) と g(x)

図 1 は緩減少関数 $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ の無限積分とそれを変数変換 (2) で急減少関数 $g(x)$ に変換したものである． $f(x)$ に比べ $g(x)$ は 0 への収束が速い．無限台形則が少ない項数で打ち切れ効果的である．

2.2　周期関数の 1 周期積分

周期 2π の周期関数 f の m 点台形則による近似は

$$T_m f = \frac{2\pi}{m}\sum_{l=0}^{m-1} f(\frac{2\pi l}{m}) \cong \int_0^{2\pi} f(x)dx = If.$$

f が解析的ならば実数 $r(0 \le r < 1)$ が存在し

$$|T_m f - If| = O(r^m).$$

3　二変数関数の無限積分

二変数関数 $f(x,y)$ の無限積分,

$$If = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy.$$

これを二重指数型変数変換し計算する．

3.1　直積型公式

刻み幅 h, 積分範囲 $(-mh \le x \le mh), (-mh \le y \le mh)$ で各次元に DE 公式を用いると

$$I_m^h f = h^2 \sum_{k=-m}^{m}\sum_{l=-m}^{m} f(\varphi(hk),\varphi(hl))\varphi'(hk)\varphi'(hl)$$

となる. 変数変換は無限区間積分なので (2) を用いる．

3.2　極座標変換型公式

二変数関数 $f(x,y)$ を極座標変換した

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdrd\theta$$

を角度方向と動径方向に分けて考える．角度方向は台形則で計算し, 動径方向の積分には半無限積分の変数変換 (1) を用いる．動径方向は刻み幅 h, 積分範囲 $(-mh \le x \le mh)$, 角度方向は n 点台形則で近似計算する．

$$I_{m,n}^h f = \frac{2\pi h}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=-m}^{m} f(\varphi(hl)\cos\frac{2\pi k}{n}, \varphi(hl)\sin\frac{2\pi k}{n})$$

$$\times\varphi(hl)\varphi'(hl)$$

3.3　直積型公式と極座標変換型公式の比較

直積型公式と極座標変換型公式で,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4+y^4}dxdy = \pi K(\frac{1}{2})$$

$$\cong 5.824747385416855$$

を近似計算する．ここで $K(\frac{1}{2})$ は第一種完全楕円積分である．丸め誤差を考慮して絶対誤差 10^{-14} を十分な精度と考える．

- 直積型公式
  原点を中心とした正方形の形に標本点集合を取り, その正方形を大きくしながら標本点集合の関数値の和が 10^{-15} 以下になるまで計算を行うプログラムを使用する.

刻み幅	標本点数	絶対誤差
0.10	4225	6.2125×10^{-7}
0.08	6561	5.70595×10^{-8}
0.06	11881	1.8134×10^{-9}
0.04	25921	5.74829×10^{-12}
0.02	100489	8.88178×10^{-16}

- 極座標変換型公式
  プログラムは動径 r を増加させながら半径 r の円の上にある標本点を順に考えていくものを使用する. 直積型公式と同様に標本点集合の関数値の和が 10^{-15} 以下になるまで計算を行う. 角度方向は 1 周期 2π を n 等分の台形則を用いる.

刻み幅	n	標本点数	絶対誤差
0.15	64	2816	7.2322×10^{-10}
0.15	68	2992	7.2208×10^{-10}
0.15	72	3168	7.2232×10^{-10}
0.10	64	4160	9.3880×10^{-13}
0.10	68	4420	6.3948×10^{-14}
0.10	72	4680	4.5297×10^{-14}
0.08	64	5184	9.1393×10^{-13}
0.08	68	5508	1.5809×10^{-13}
0.08	72	5832	1.3322×10^{-14}

直積型公式では 10^{-12} まで誤差を減らすのに標本点数をおよそ 25000 個も必要とするのに対し, 極座標変換型公式では標本点数 3900 ですでに 10^{-12} まで減らしている.

3.4 直積型公式の低性能の原因

直積型公式で変換した関数の等高線は次のようになっている.

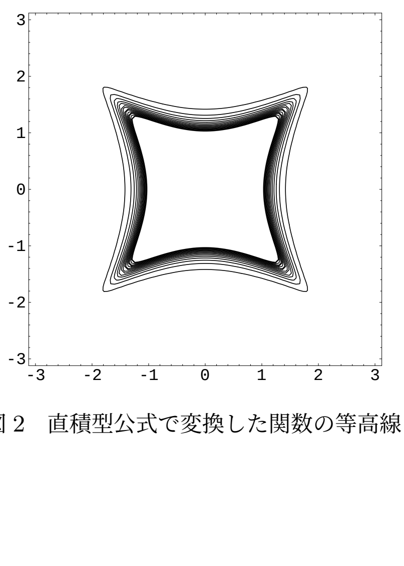

図 2　直積型公式で変換した関数の等高線

直積型公式では正方形の形の標本点集合を取っていくので図 2 の 4 箇所の飛び出た部分がプログラムの終了を引き伸ばし, 標本点数を増やしている.
また等高線から, 既存の無限区間二重指数型積分公式を二次元で使用すると原点中心に均等に効果が表れないことがわかる.

4 非直積型新 DE 公式

直積型公式の低性能の原因を考え改良をする. x や y について二重指数型変数変換するのではなく, 原点からの距離 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ に対して二重指数型変数変換する. すると二変数関数 $f(x, y) = \frac{1}{1+x^4+y^4}$ の無限積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(r)\frac{x}{r}, \varphi(r)\frac{y}{r}) \times \frac{\varphi(r)\varphi'(r)}{r}dxdy$$

と変形される. 変数変換は (2) である.

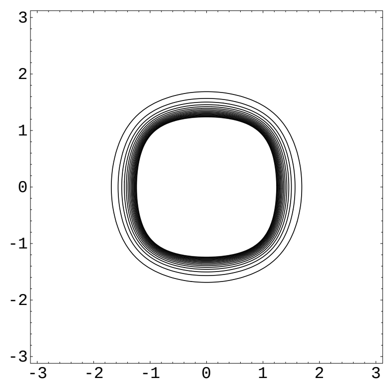

図 3　改良変数変換をした関数の等高線

図 3 は改良改良変数変換をした関数の縁の等高線を描いたものである.

刻み幅	標本点数	絶対誤差
0.10	4096	3.5829×10^{-9}
0.09	4900	2.7612×10^{-11}
0.08	6400	7.4857×10^{-11}
0.07	8100	4.8050×10^{-13}
0.06	11236	9.7699×10^{-15}

DE 公式の改良によって図 2 にあった 4 箇所の飛び出た部分はなくなった. 精度は向上したがまだ極座標変換型公式とはかなりの差がある.

5 おわりに

二重指数型積分公式は一次元では高い効果があるのに対し二次元ではその効果が失われてしまう. 改良した非直積型 DE 公式と極座標変換型公式の間にある格段の差について原因を究明しなければならない. 二重指数型変数変換の改良をすること, 積分公式を新たに見つけること, これらも今後の研究課題として残っている.