高精度 Newton 補間系列の構成

2002MM054 三浦 友裕

指導教員　杉浦 洋

1　はじめに

本研究では，Newton 補間法に付随する定義多項式の最大絶対値が小さくなるように補間点列を設計することで，高精度 Newton 補間系列の構成を目標とする．

具体的には，ある次数での定義多項式の極値を計算し，それを小さくするように次の補間点を定める．定義多項式の極値を求めるために，多項式の零点を求める同時反復法である Durand-Kerner 法に改良をほどこして用いた．

以下，標準区間 $[-1, 1]$ 上の補間について述べる．

2　補間多項式による近似

2.1　補間多項式

区間 $[-1, 1]$ の滑らかな関数を $f(x)$ とする．区間 $[-1, 1]$ の $n+1$ 個の相異なる点 $x_l(0 \le l \le n)$ 上で補間条件

$$p_n(x_l) = f(x_l) \quad (0 \le l \le n)$$

を満たす高々n 次の多項式 $p_n(x)$ を，$X = (x_l)_{0 \le l \le n}$ を分点とする n 次多項式補間といい，

$$p_n(x) = L(X)f(x)$$

と書く．

2.2　補間多項式の誤差

関数 $f(x)$ は $n+1$ 回連続微分可能とする．区間 $[1, -1]$ 内の $n+1$ 個の分点 $X_n = (x_l)_{0 \le l \le n}$ 上の，関数 $f(x)$ の n 次補間多項式，点 $x \in [1, -1]$ に対して点 $\xi \in [1, -1]$ が存在して近似誤差は,

$$p_n(x) - f(x) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} w_{n+1}(x)$$

$$w_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \qquad (1)$$

となる．ここで $w_{n+1}(x)$ を多項式補間の定義多項式と呼ぶことにする．これより区間 $[1, -1]$ における補間多項式の誤差は,

$$| p_n(x) - f(x) | \le \left(\frac{1}{(n+1)!} \max_{-1 \le x \le 1} | f^{(n+1)}(x) | \right) \cdot W(X_n)$$

で評価できる．ここで定義多項式の最大絶対値

$$W(X_n) = \max_{-1 \le x \le 1} | w_{n+1}(x) | \qquad (2)$$

補間 $L(X_n)$ の誤差係数という．$W(X_n)$ はもちろん小さいほうが望ましい [1].

2.3　Newton 補間

Newton 補間は次の形式の補間公式である．

$$L(X_n)f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k w_k(x).$$

無限分点列 $X = \{x_0, x_1, \cdots, x_m, \cdots\}$ により，Newton 補間系列

$$L(X_n)f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k w_k(x), \quad X_n = \{x_0, \cdots, x_n\}$$

をつくる．この系列は,

$$L(X_0)f(x) \equiv b_0$$

からはじまって，$n = 0, 1, \cdots$ で漸化式

$$L(X_{n+1})f(x) = L(X_n)f(x) + b_n w_{n+1}(x)$$

$$b_n = \frac{f(x_{n+1}) - L(X_n)f(x_{n+1})}{w_{n+1}(x_{n+1})}$$

により，順次構成できる．

2.4　目的

Newton 補間系列の精度は, 誤差係数列 $\{W(X_n)\}_{n \ge 0}$ が小さいほど良い．よって高精度の Newton 補間列を得るためには，$\{W(X_n)\}_{n \ge 0}$ が小さくなるように分点列 X を設計すればよい.

鳥居論文では準安定補間過程の研究 [2] から，$(x_i) = \{\cos i\alpha\}$ を提案しており，α の値としては $\alpha = 0.4$ が推奨されている．我々は，定義多項式 $|w_n(x)|$ の極大点をすべて求め，それらによって次の標本点を定める方法を考えた.

3　Durand-Kerner 方法

X の最初の 2 点を $x_0 = 1$，$x_1 = -1$ として x_2 以降を上で述べたように決める.

我々の構成法では，$|w_n(x)|$ の極大値をすべて求める必要がある．そのためには $w'_n(x)$ の 0 点をすべて求めなければならない．そのために Durand-Kerner 法を用いた.

3.1　Durand-Kerner 法（同時反復法）

Durand-Kerner 法は同時反復法の一種で，n 次方程式

$$P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (a_n \ne 0)$$

の n 個の解を同時に求める方法である.

初期近似を $z_1^{(0)}, \cdots, z_n^{(0)}$ とし，$\nu = 0, 1, 2, \cdots$ において,

$$z_i^{(\nu+1)} = z_i^{(\nu)} - \frac{P(z_i^{(\nu)})}{\prod_{j=1, j \ne i} (z_i^{(\nu)} - z_j^{(\nu)})} \quad (1 \le i \le n)$$

で，新しい近似値を作る．この反復法は 2 次収束する．我々の問題では，$w_n(x)$ の 0 点の中点を $w'_n(x)$ の 0 点の初期近似とした．すなわち

$$z_i^{(0)} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2} \quad (1 \le i \le n)$$

である．定義多項式 $w_{n+1}(x)$ の極大点極小点は，$P_n(x) = \frac{d}{dx}w_{n+1}(x)$ の 0 点である．Durand-Kerner 法を代数方程式 $P_n(x) = 0$ に適用し，全ての極大点，極小点を見つける．

3.2 1 点追加型系列

定義多項式の最大絶対値 $|w_n(x)|$ が最大になる 1 点 x_n を次の標本点として追加する．

次の定義多項式は,

$$w_{n+1}(x) = (x - x_n)w_n(x)$$

となる．$w'_n(x)$ の 0 点を β_i として $|w_n(\beta_i)|$ 最大の点を β_k とおき，それを x_n とする．このとき，$w'_n(x)$ の 0 点を求めるために Durand-Kerner 法を用いた．

この方法によって得られた標本点列において，標本数 n と誤差係数 $W(X_n)$ の関係を図 (1) に示す．尚，図 (1) で横軸は標本点数 n，縦軸は $W(X_n)$ の常用対数，点線のグラフは Chebyshev 補間の誤差係数である．

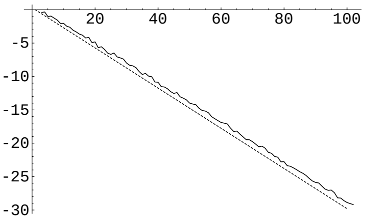

図 1　$W(X_n)$ が小さくなっていく様子

3.3 minmax 戦術

minmax 戦術とは $|w_n(x)|$ の極大点 β_i の中で，$w_n(x)(x-\beta_i)$ の最大値を最小にする点 β_k を次の標本点 $x_n = \beta_k$ として追加するアルゴリズムである．

この数値実験の結果, 精度はまったく良くならなかった．

この構成法において，$n = 100$ のときの定義多項式 $w_{99}(x)$ のグラフを 2 に示す．

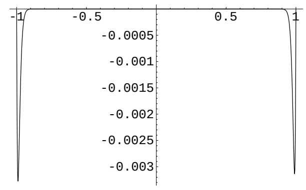

図 2　標本点 $n = 100$ のときの定義多項式 $w_{99}(x)$

補間点は原点付近ばかりに追加され，区間両端のピークは最後まで消すことができなかった．

3.4 2 点追加型対称系列

原点対称な標本点 X_{2n+1} に定義多項式の絶対値 $|w_{2n+1}(x)|$ が最大になる 2 点 $\pm x_{n+1}$ を追加するためのアルゴリズムを考える．

$$w_{2n+1}(x) = x\prod_{l=1}^{n}(x^2 - x_l^2)$$

として $|w_{2n+1}(x)|$ が最大絶対値となる 2 点 $\pm x_{n+1}$ をとり,

$$w_{2n+3}(x) = (x^2 - x_{n+1}^2)^2 w_{2n+1}(x)$$

とする．

対称性を用いてこの $2n$ 次多項式の 0 点の問題を n 次多項式の問題に帰着する方法で考案した．

標本点列 n と誤差係数 $W(X_n)$ の関係を図 (3) に示す．尚，図 (3) で横軸は標本点数 n，縦軸は常用対数，点線のグラフは Chebyshev 補間の誤差係数である．

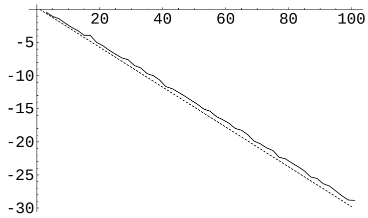

図 3　$W(X_n)$ が小さくなっていく様子

4 終わりに

研究の結果，Newton 補間法に付随する定義多項式の最大絶対値が小さくなるように補間点列を設計することで，高精度の Newton 補間系列を構成する事ができた．得られた系列の誤差係数は，目標である Chebyshev 補間系列のそれに近いものであった．

3.3 節の minmax 戦術を考案した時点では，この方法が一番精度が良くなると思ったが，プログラムを作成し数値実験を行ってみると，思惑とは異なり最悪の結果となった．アイディアなどは考えるだけでなく，実験を行ってみないと結果は分からないという事を思い知らされた．

参考文献

[1] 小国 力：Fortran 95,C & Java による新数値計算法ー数値計算とデータ分析ー, サイエンス社 (1997).

[2] 鳥居 達生：準安定な補間過程の一構成法, 情報処理論文誌, Vol.9 No.4, pp.197-204 (1968.7).

[3] 杉浦 洋：数値計算の基礎と応用ー数値解析学への入門ー, サイエンス社 (1997).

[4] 山本 哲郎：数値解析入門 [増訂版], サイエンス社 (1997).