準等間隔標本点を用いた高速補間システムの構成

2002MM043 木全 宏一
指導教員　杉浦 洋

1　はじめに

本研究では，複素数平面における単位円板上の解析関数の多項式補間を考える．単位円周上に等間隔標本点を取ると，精度が高く計算が安定である．また，標本点数が 2 のべきの時には FFT を用いて補間多項式の係数が高速に計算できる．これらの理由から，周期関数の補間近似には，これまで等間隔標本点集合

$$U_m := \{z|z^m = 1\} \tag{1}$$

が主として用いられ，この方法が専ら詳しく研究されてきた．しかし，この方法で近似精度を上げるには標本点数を 2 のべきで増やしていかなければならず，きめ細かい精度設定が出来なかった．

そこで，本研究では，杉浦 [1, 2] で提案されている任意に低い増加率で標本点数を増やし精度を上げてゆく計算効率の良い方法，すなわち，準等間隔標本点集合による再利用可能標本点集合列上の補間法を考える．

ここで，単位円周 C 上の $Z = \{\zeta_1, \cdots, \zeta_n\}$ を核とする準等間隔標本点集合は，

$$R_m(Z) := \{z|\varphi(z^m) = 0\}, \varphi(z) := \prod_{l=1}^{n}(z - \zeta_l) \tag{2}$$

で定義される．

2　アプローチ

杉浦 [1] により，準等間隔標本点の補間作用素は，等間隔標本点上の補間と同程度の安定性と収束性をもつことが証明されている．

杉浦 [2] では「誤差係数」を導入し，補間法の誤差を比較している．本研究ではこの誤差係数を比較して，最良の準等間隔標本点集合を求める．

3　準等間隔標本点上の多項式補間

3.1　ラグランジュ補間

単位円周 C 上の標本点集合 $Y = \{\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N\}$ 上の $n-1$ 次ラグランジュ補間は，

$$L(Y)f(z) := \sum_{l=1}^{N} \omega_l(z) f(\eta_l) \tag{3}$$

$$\omega_l(z) := \frac{\varphi(z)}{\varphi'(\eta_l)(z - \eta_l)},\ 1 \le l \le N \tag{4}$$

$$\varphi(z) := \prod_{l=1}^{N}(z - \eta_l) \tag{5}$$

と書ける。式 (4) は $\omega_l(z)$ 上の $f(z)$ の基本多項式である．

3.2　誤差係数

単項式 $z^k (k \ge 0)$ の補間を，

$$L(X)z^k = \sum_{j=0}^{N-1} \mu_{kj} z^j \tag{6}$$

とし，ラグランジュ補間の誤差係数を

$$\omega(X) = \max_{k \ge N} \sum_{j=0}^{N-1} |\mu_{kj}| \tag{7}$$

と定義する．$f(z)$ のテイラー展開

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \tag{8}$$

が単位円板上で絶対収束するとき，

$$|f(z) - L(X)f(z)| \le (1 + \omega(X)) \sum_{k \ge n}^{\infty} |c_k| \tag{9}$$

が成立する．

3.3　$R_m(Z)$ 上の補間の誤差係数

杉浦 [2] により，

$$\omega(R_m(Z)) = \omega(Z) \tag{10}$$

ということが証明されている．

4　多項式補間システム

4.1　標本点増加系列

等間隔標本点 U_n に標本点を追加して再び等間隔標本点 U_m を作るには，$m = 2n$ としなければならない．すなわち，標本点数は倍増する．

$$\text{等間隔標本点} : U_n = \{e^{\frac{2\pi l}{n} i} | 0 \le l < n\} \tag{11}$$

$$\downarrow$$

$$U_m = \{e^{\frac{\pi l}{n} i} | 0 \le l < m\} \tag{12}$$

整数 $\iota \ge 2$ に対して，$U_n = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_l = U_{2n}$ なる核の列 $\mathbf{X} = (X_i)_{0 \le i \le \iota}$ をとり，準等間隔標本点の系列 $U_n = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_{l-1} \subset U_m = R_2(X_0) \subset \cdots \subset R_2(X_{l-1}) \subset \cdots$ により標本点を増やす．この系列の平均増加率は $\sqrt[\iota]{2}$ である．

標本点数の基本増加数を，

$$d_i = \#X_{i+1} - \#X_i\ (0 \le i \le \iota - 1) \tag{13}$$

と表し，

$$d_0 \le d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_{\iota-1} \le d_\iota = 2d_0 \tag{14}$$

と制限する (ただし，#は集合の要素数を表す)．n, ι を固定したとき，系列 $\mathbf{X}$ の誤差係数を

$$\omega(\mathbf{X}) = \max_{0 \le i \le \iota} \omega(X_i) \tag{15}$$

で定義し，これが最小のものを最良の系列という．$Z \subset U_m$ のときは，

$$\omega(Z) = \max_{\#Z \le k < m} \sum_{k=0}^{\#Z-1} |\mu_{kj}| \tag{16}$$

となるので，$\omega(\mathbf{X})$ は有限の計算で求められる [2].

5 最良系列探索プログラム

5.1 探索アルゴリズム

与えられた n, ι について，誤差係数 $\omega(\mathbf{X})$ が最小の系列 $\mathbf{X}$ を求めるアルゴリズムについて考える．核の系列を，

$$\mathbf{X} = \{X_0, X_1, \cdots, X_\iota\}, \tag{17}$$
$$U_n = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_\iota = U_{2n} \tag{18}$$

とする．

$$B_i = X_{i+1} - X_i, \tag{19}$$
$$d_i = \# B_i \tag{20}$$

としたとき，増加数列

$$\mathbf{d} = d_i \tag{21}$$

は条件 (14) を満たす．このような系列 $\mathbf{X}$ のなかで $\omega(\mathbf{X})$ が最小のものを見つける．説明のため，$\iota = 3$ のときのアルゴリズムの概略を示す．

以下の作業が完了した後には，与えられた n における最良系列 $\mathbf{X}_{min}$ とその誤差係数 ω_{min} が得られている．

1. U_n と $V_n = U_{2n} - U_n$ を計算する．
2. 条件 (14) を満たす増加数列全体からなるリスト $\mathbf{D}$ を作る．
3. ω_{min} に仮の最小誤差係数を代入．
4. 増加数列リスト $\mathbf{D}$ の全ての要素 $\mathbf{d} = \{d_0, d_1, d_2\}$ について以下の操作を行う．
   (a) V_n から d_0 の部分集合全体からなるリスト $\mathbf{B}_1$ を作成．
   (b) $\mathbf{B}_1$ の全ての要素 B_1 について次の操作を行う．
      i. $X_1 = U_n + B_1$.
      ii. $\omega(X_1) > \omega_{min}$ ならば，次の B_1 へ．
      iii. $\omega(X_1) \leq \omega_{min}$ なら $\mathbf{B}_2$ を作成．$\mathbf{B}_2$ は $V_n - B_1$ の部分集合でサイズ d_1 のもの全てからなるリストである．
      iv. $\mathbf{B}_2$ の全ての要素 B_2 について，以下の操作を行う．
         A. $X_2 = X_1 + B_2$.
         B. $\omega(\mathbf{X}) = \max(\omega(X_1), \omega(X_2))$ を計算．
         C. $\omega(\mathbf{X}) < \omega_{min}$ なら，$\omega_{min} = \omega(\mathbf{X}), \mathbf{X}_{min} = \mathbf{X}$ とする．そうでなければ，次の B_2 の要素の処理へ移る．

このように，$\iota = 3$ においては B_1, B_2 の順でループが入れ子になっている．一般の ι では，$B_1, B_2, \cdots, B_{\iota-1}$ の順で入れ子になり，B_1 から B_{i-1} までが固定された段階で選択可能な B_i が全て探索される．

5.2 プログラム

実際のプログラムでは同じ誤差係数の最良系列が存在する可能性があるので，実装においてはそれら全てを記録するようにプログラムした．

6 最良系列

$$\left.\begin{array}{l} \iota = 2 (2 \leq n \leq 20) \\ \iota = 3 (3 \leq n \leq 16) \\ \iota = 4 (4 \leq n \leq 12) \end{array}\right\}$$ で実験して得られた最良系列を示す．

図は，それぞれの ι における最良系列の標本点追加パターンを表している．○数字は追加の順番を示す．

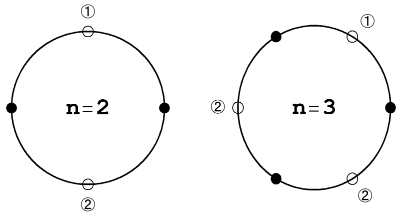

図 1 $\iota = 2$ における標本点追加パターン

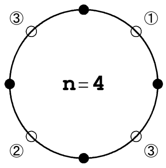

図 2 $\iota = 3$ における標本点追加パターン

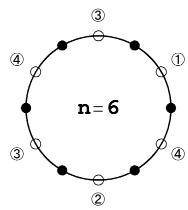

図 3 $\iota = 4$ における標本点追加パターン

実験では，$\iota = 2$ 及び 3 における最良系列の誤差係数が $\omega = 3$ であった．一方，$\iota = 4$ では最良系列の誤差係数が $\omega = 5$ となり，ι が大きくなるにつれて誤差係数も大きくなることが予想される．また，どの ι でも最も小さい n の最良系列が 1 つ乃至 2 つ程度あり，大きな n で発見された最良系列は，すべて小さな n の最良系列のコピー (核の列 $X_0 \subset X_1 \subset X_2$ に対して，$R_m(X_0) \subset R_m(X_1) \subset R_m(X_2)$ をコピーという) であった．

7 おわりに

本研究で，精度の良い標本点増加系列を発見することができた．今後の課題として，本研究で発見した最良系列をつかった補間システムの実装が挙げられる．

参考文献

[1] 杉浦 洋，鳥居達生：POLYNOMIAL INTERPOLATION ON QUASI-EQUIDISTRIBUTED NODES ON THE UNIT DISK, SIAM J. NUMER. ANAL.，Vol. 29, pp. 1154-1165, (1992. 8).

[2] 杉浦 洋：FFT の一般化とその数値解析的応用に関する研究，博士論文，(1992).