ワラント債の評価について

2002MM083 佐藤 進平

指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

あらかじめ決められた一定の価格で一定量の新株式を取得できる権利をワラント (新株予約権) という．さらに，社債にワラントが付与されたものをワラント債という．ワラント債には，社債の部分とワラントの部分を一緒にして販売する「非分離型ワラント債」と別々に売買できる「分離型ワラント債」があるので，本研究ではそれぞれを評価し，両者を比較する．

2　ヨーロッパ型の非分離型ワラント債の評価

本節では，ヨーロッパ型の非分離型ワラント債の評価について分析する．時刻 t での企業価値 V_t が，確率微分方程式 (幾何ブラウン運動)

$$dV_t = rV_t dt + \sigma V_t d\tilde{Z}_t \tag{1}$$

にしたがうとする．ただし，r は無リスク利子率，σ はボラティリティ，$\tilde{Z}_t$ はリスク中立測度のもとでの標準ブラウン運動である．このとき，株式数を n, ワラント債 (ワラント) の発行数を m, 額面価格を X とすると，非分離型ワラント債の満期 T でのペイオフは，

$$W_h(V_T, T) = \max\left(\frac{V_T}{n+m} - X, 0\right) + X \tag{2}$$

となる．よって，時刻 0 でのヨーロッパ型の非分離型ワラント債の価格 $W_h(V_0, 0)$ は，

$$\begin{aligned} W_h(V_0, 0) &= \tilde{E}\left[e^{-rT}\left\{\max\left(\frac{V_T}{n+m} - X, 0\right) + X\right\}\right] \\ &= C\left(\frac{V_0}{n+m}, 0\right) + e^{-rT}X \end{aligned} \tag{3}$$

である．ただし，$C\left(\frac{V_0}{n+m}, 0\right)$ は，ヨーロピアンコールオプションの解析解である．すなわち，

$$C\left(\frac{V_0}{n+m}, 0\right) = \frac{V_0}{n+m}N(d_1) - e^{-rT}XN(d_2) \tag{4}$$

である．ここで $N(\cdot)$ は標準正規分布の累積分布関数であり，また，

$$d_1 = \frac{\log\frac{V_0}{(n+m)X} + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}},\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{5}$$

である．

3　ヨーロッパ型の分離型ワラント債の評価

本節では，ヨーロッパ型の分離型ワラント債の評価について分析する．分離型ワラント債はワラントと社債を分離することが可能であるので，まずワラントの部分の評価について分析する．

ヨーロピアンワラントの満期 T でのペイオフは，権利行使価格を X とすると，

$$W(V_T, T) = \frac{n}{n+m}\max\left(\frac{V_T}{n} - X, 0\right) \tag{6}$$

である．よって，時刻 0 でのヨーロピアンワラントの価格 $W(V_0, 0)$ は，

$$\begin{aligned} W(V_0, 0) &= \tilde{E}\left[e^{-rT}\frac{n}{n+m}\max\left(\frac{V_T}{n} - X, 0\right)\right] \\ &= \frac{n}{n+m}C\left(\frac{V_0}{n}, 0\right) \end{aligned} \tag{7}$$

である．

一方，社債の現在価格は，額面価格 X の割引債とすると，$e^{-rT}X$ である．よって，時刻 0 でのヨーロッパ型の分離型ワラント債の価格 $W_s(V_0, 0)$ は，

$$W_s(V_0, 0) = \frac{n}{n+m}C\left(\frac{V_0}{n}, 0\right) + e^{-rT}X \tag{8}$$

である．

4　非分離型，分離型ワラント債の価格の比較

ヨーロッパ型の非分離型ワラント債の価格 $W_h(V_0, 0)$ と分離型ワラント債の価格 $W_s(V_0, 0)$ を比較する．(3) 式，(8) 式より両者の第 2 項目は等しいので，第 1 項目の $C\left(\frac{V_0}{n+m}, 0\right)$ と $\frac{n}{n+m}C\left(\frac{V_0}{n}, 0\right)$ を比較をすればよい．すなわち，満期 T でのペイオフを比較すれば容易である．非分離型ワラント債の満期 T でのペイオフは，(2) 式であり，その第 1 項は，

$$\max\left(\frac{V_T}{n+m} - X, 0\right) \tag{9}$$

である．同様に分離型ワラント債の場合は (6) 式より，

$$\max\left(\frac{V_T}{n+m} - \frac{nX}{n+m}, 0\right) \tag{10}$$

である．それぞれの権利行使価格は X と $\frac{nX}{n+m}$ である．よって，分離型ワラント債の方が権利行使価格が小さいので，価格は高くなる．また，分離型ワラント債と非分離型ワラント債の価格の差は，

$$\begin{aligned} &W_s(V_0, 0) - W_h(V_0, 0) \\ &= \frac{n}{n+m}C\left(\frac{V_0}{n}, 0\right) - C\left(\frac{V_0}{n+m}, 0\right) \\ &\geqq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

となるので，

$$P(V_0,0) \equiv \frac{n}{n+m} C\left(\frac{V_0}{n},0\right) - C\left(\frac{V_0}{n+m},0\right) \quad (12)$$

とおけば，

$$W_s(V_0,0) = W_h(V_0,0) + P(V_0,0) \quad (13)$$

という関係式が成り立つ．$P(V_0,0)$ は，分離型ワラント債の分離プレミアムと呼ぶことができる．また，$P(V_0,0)$ はヨーロピアンコールオプションの価格から計算可能である．

5 数値例

本節では，具体的な数値を用いて，非分離型ワラント債と分離型ワラント債の価格の比較をする．n=1000000, m=100000, X=10, r=0.01, σ=0.45, T=0.5 とすると，企業価値とヨーロッパ型のワラント債の価格の関係は 図 1 のようになる．

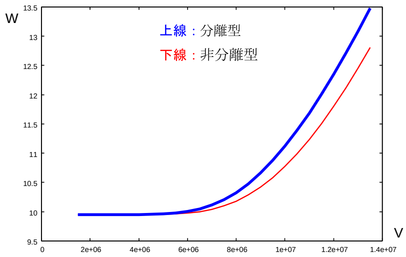

図 1 ヨーロッパ型のワラント債の価格の比較

6 アメリカ型の非分離型ワラント債の評価

本節では，アメリカ型の非分離型ワラント債の評価について分析する．

アメリカ型のワラント債の場合には，早期行使が可能なので，このことを考慮に入れるために，$[0,T]$ におけるすべての停止時の集合を Γ とおく．さらに，投資家はワラント債の価値が最大になる最適な時点 $t^* \in \Gamma$ で権利行使するとする．

企業価値 V_t が (1) 式にしたがうとする．満期前の t^* の時点で権利行使したときのアメリカ型の非分離型ワラント債のペイオフは，

$$\frac{V_{t^*}}{n+m} \quad (14)$$

となる．一方，満期 T でのペイオフは，(2) 式の

$$\max\left(\frac{V_T}{n+m}, X\right) \quad (15)$$

と同一である．よって，時刻 0 でのアメリカ型の非分離型ワラント債の価格 $W_h^a(V_0,0)$ は，

$$W_h^a(V_0,0) = \sup_{\tau\in\Gamma} \tilde{E}\left[e^{-r\tau}\frac{V_\tau}{n+m}\mathbf{1}_{\{\tau<T\}} + e^{-rT}\max\left(\frac{V_T}{n+m}, X\right)\mathbf{1}_{\{\tau=T\}}\right] \quad (16)$$

となる．

7 アメリカ型の分離型ワラント債の評価

本節では，アメリカ型の分離型ワラント債の評価について分析する．まず，アメリカンワラントを評価する．

企業価値 V_t は (1) 式にしたがうとする．権利行使時点 t^* におけるアメリカンワラントのペイオフは，

$$\frac{n}{n+m}\max\left(\frac{V_{t^*}}{n} - X, 0\right) \quad (17)$$

となる．よって，時刻 0 でのアメリカンワラント $W^a(V_0,0)$ の価格は，

$$W^a(V_0,0) = \frac{n}{n+m}\sup_{\tau\in\Gamma}\tilde{E}\left[e^{-r\tau}\max\left(\frac{V_\tau}{n} - X, 0\right)\right] \quad (18)$$

となる．したがって，時刻 0 でのアメリカ型の分離型ワラント債の価格 $W_s^a(V_0,0)$ は，

$$W_s^a(V_0,0) = \frac{n}{n+m}\sup_{\tau\in\Gamma}\tilde{E}\left[e^{-r\tau}\max\left(\frac{V_\tau}{n} - X, 0\right)\right] + e^{-rT}X \quad (19)$$

となる．

8 二項モデルによる計算結果

アメリカ型のワラント債は，解析解を求めることができないので，二項モデルを使って計算する．

二項モデルを使って計算した結果，企業価値とアメリカ型のワラント債の価格の関係は 図 2 のようになる．

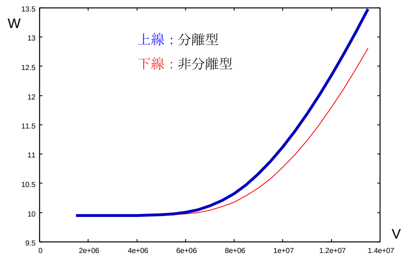

図 2 アメリカ型のワラント債の価格の比較

また，二項モデルを利用して数値計算をおこなうと，配当がなければヨーロッパ型とアメリカ型のワラント債の価格は一致する．

9 まとめ

本研究では，非分離型ワラント債と分離型ワラント債の評価について分析し，両者の比較をおこなった．その結果，企業価値がある一定以上になれば分離型ワラント債の価格の方が，非分離型ワラント債の価格よりも高くなることがわかった．なぜなら，分離型ワラント債には，投資家に対してワラント債をワラントと社債に分離できるという選択権が付くので，その分，価値は高くなると考えられる．

参考文献

[1] Lyuu, Yuh-Dauh: *Financial Engineering and Computation*, Cambridge University Press, 2002.