

# 述語計算における論証形式の証明可能性

2002MM085 篠原 愛枝

指導教員 佐々木 克巳

## 1 はじめに

本研究では、John Nolt/Dennis Rohatyn[1,2] できりあげられている命題計算および述語計算における証明可能性の理解を深めることを目的とする。

まず、[1] にしたがって命題計算における論証形式の証明可能性の理解を深める。具体的には、文および推論の形式的表現である論理式および論証形式を定義し、論証形式については、それを表す推論の正当性を意図した、論証形式の証明可能性を定義する。そして、多くの論証形式を証明することで、我々が普段用いている推論の形式的な理解を深める。また、既に証明された論証形式が別の論証形式の証明に役立つことがある。[1] ではこの性質を持つ論証形式を重視し、またこの仕組みを派生規則、定理、同値定理という概念を用いて説明している。本研究でも [1] にしたがって、この性質を持つ論証形式を重視する。

次に、命題計算での理解を [1] にしたがって述語計算へと発展させる。述語計算においても多くの論証形式を証明することで、命題計算と同様の理解を深める。別の論証形式の証明に役立つ論証形式を重視する点も命題計算と同様である。

さらに、[2] で取り上げられている、述語計算をもととして進められていく研究の分野から、形式的算術についても同様に理解を深める。

## 2 論理式および論証形式

論理式は、形成規則と呼ばれる次の規則によって定義される。

形成規則

- (1) どの文記号も論理式である。
- (2) もし  $\phi$  が論理式ならば、 $\neg \phi$  も論理式である。
- (3) もし  $\phi$  と  $\psi$  が論理式ならば、 $(\phi \ \psi)$ 、 $(\phi \ \psi)$ 、 $(\phi \ \psi)$  もそれぞれ論理式である。

論理式  $\phi_1, \dots, \phi_n, \psi$  に対して、 $\phi_1, \dots, \phi_n \ \psi$  という表現を論証形式という。これは、 $\phi_1, \dots, \phi_n$  を仮定すると  $\psi$  が導かれると解釈され、推論のパターンを表現しているといえる。

## 3 論証形式の証明可能性

論証形式の表す内容の正当性は、一般に  $\phi_1, \dots, \phi_n$  にくつかの正しい推論を適用し、 $\psi$  を導くことで証明する。

命題計算ではこの手続を形式化して、論証形式の証明可能性を定義する。すなわち正しい推論を形式化した基本的な推論規則を用意し、 $\phi_1, \dots, \phi_n$  にそれらの推論規則を適用して  $\psi$  が導けたとき、 $\phi_1, \dots, \phi_n \ \psi$  が証明可能で

あると定義する。

基本的な推論規則は十個ある。導入規則と除去規則の二つが五つの論理演算子各々に対し割り当てられている。また、十個の推論規則は仮説を用いないものと用いるものに分けられる。仮説を用いない八つの推論規則を以下に列挙する。仮説を用いる二つの推論規則については、論証形式の証明可能性の定義の中で述べる。

仮説を用いない推論規則

- ・前件肯定規則 (MP): 条件法とその前件からその後件を推論してよい。
- ・否定除去規則 ( $\neg$  E):  $\neg \neg \phi$  という形式の論理式から、 $\phi$  を推論してよい。
- ・連言導入規則 ( $\wedge$  I): 任意の論理式  $\phi, \psi$  から、連言  $\phi \ \psi$  を推論してよい。
- ・連言除去規則 ( $\wedge$  E): 連言  $\phi \ \psi$  から、その連言肢  $\phi, \psi$  のいずれかを推論してよい。
- ・選言導入規則 ( $\vee$  I): 論理式  $\phi$  から、 $\phi$  と任意の論理式との選言  $\phi \ \psi$  を推論してよい。
- ・選言除去規則 ( $\vee$  E): 各々  $\phi \ \psi, \phi \ \chi, \psi \ \chi$  という形式の三つの論理式から、論理式  $\chi$  を推論してよい。
- ・双条件法導入規則 ( $\leftrightarrow$  I): 各々  $\phi \ \psi$  と  $\psi \ \phi$  という形式の二つの論理式から  $\phi \ \psi$  を推論してよい。
- ・双条件法除去規則 ( $\leftrightarrow$  E):  $\phi \ \psi$  という形式の任意の論理式から、 $\phi \ \psi$  または  $\psi \ \phi$  を推論してよい。

論証形式の証明可能性の定義

- (1)  $\phi_1, \dots, \phi_n \ \phi_i$  は証明可能である。
- (2)  $\phi_1, \dots, \phi_n \ \psi_1$  が証明可能で、仮説を用いない推論規則によって  $\psi_1$  から  $\psi_2$  が推論されるとき、 $\phi_1, \dots, \phi_n \ \psi_2$  も証明可能である。
- (3)  $\psi_1, \phi_1, \dots, \phi_n \ \psi_2$  が証明可能なとき、 $\phi_1, \dots, \phi_n \ \psi_1 \ \psi_2$  も証明可能である。
- (4)  $\psi_1, \phi_1, \dots, \phi_n \ \psi_2 \ \neg \psi_2$  が証明可能なとき、 $\phi_1, \dots, \phi_n \ \neg \psi_1$  も証明可能である。

上の定義における (3) を条件法証明規則 (CP)、(4) を背理法 (RAA) という。この二つが仮説を用いる推論規則である。また、(3)(4) における  $\psi_1$  を仮説という。

## 4 派生規則について

すでに証明された論証形式から引き出された推論規則を派生規則とよぶ。派生規則によって、証明方針の立て方が柔軟になり、その結果、証明を短縮したり簡単にしたりすることができる。派生規則には、次のものがある。

- 後件否定規則 (MT), 仮言三段論法 (HS)
- 吸収律 (ABS), 構成的ディレンマ (CD)
- 反復律 (RE), 矛盾律 (CONTRAD)

選言三段論法 (DS), 定理導入規則 (TI)

論理的に同値である式の導入規則

(略称はどの同値定理が使用されたかによる)

本研究では、これらの派生規則の証明を行った。

## 5 同値定理

論理式の中には、仮説ではない仮定が一つもなくとも証明できるものがある。それらは、命題計算の定理と呼ばれる。定理であるような双条件法は同値定理と呼ばれる。 $\phi$   $\psi$  が同値定理であるならば、 $\phi$  と  $\psi$  は互いを含意し、相互演繹可能 (論理的に同値) と言われる。同値定理は証明において特別な役割を果たす。各同値定理は二つの相互演繹可能な論理式の一方を他方で置き換えることを許容する派生推論規則として扱ってよいが、その詳細については本研究では扱わない。

同値定理を証明するには、双条件法を証明するための通常の方針に従う。つまり、I に必要な二つの条件を別々に証明することである。

同値定理には次のようなものがある。

ド・モーガンの法則 (DM), 同文反復律 (TAUT)

結合律 (ASSOC), 分配律 (DIST), 交換律 (COM)

二重否定律 (DN), 対偶律 (TRANS)

実質条件法律 (MI), 移出律 (EXP)

本研究では、これらの同値定理の証明を行った。

## 6 述語計算の論理式

述語計算とは、述語と二つの概念 “すべての” と “ある” を命題計算の諸概念と組み合わせたより包括的な論理体系である。述語計算における論理式は、次の形成規則によって定義される。ここでの、原子式、定項、変項については、[1] の定義にしたがう。

(1) 任意の原子式は論理式である。

(2) もし  $\phi$  が論理式ならば、 $\neg \phi$  も論理式である。

(3) もし  $\phi$  と  $\psi$  が論理式ならば、 $(\phi \ \psi), (\phi \ \psi), (\phi \ \psi), (\phi \ \psi)$  も論理式である。

(4) もし  $\phi$  が定項  $\alpha$  を含む論理式ならば、 $\beta\phi\beta/\alpha$  または  $\beta\phi\beta/\alpha$  という形式の任意の式も論理式である。ここで、 $\phi\beta/\alpha$  は、 $\phi$  のなかに現れている一つ以上の  $\alpha$  を、 $\phi$  のなかには現れていない変項  $\beta$  によって置き換えた結果である。

## 7 述語計算の証明可能性

述語計算は命題計算と同じ十個の推論規則を用いる (したがってまた、同じ派生規則を用いる) が、述語計算はさらに、量子子の導入規則と除去規則をもふくんでいる。

普遍量子子の推論規則

・普遍導入規則 (UI) : 定項  $\alpha$  を含む論理式  $\phi$  から、 $\beta\phi\beta/\alpha$  という形式の任意の論理式を推論してよい。ただしその際、定項  $\alpha$  はいかなる仮定のなかにも現れておらず、また  $\phi$  が現れる行において有効であるいかなる仮説

のなかにも現れていないものとする。また、 $\phi\beta/\alpha$  は、 $\phi$  のなかにも現れているすべての  $\alpha$  を  $\phi$  のなかにも現れていない変項  $\beta$  によって置き換えられた結果である。

・普遍除去規則 (UE) : 普遍量子子を持つ論理式  $\beta\phi$  から、 $\phi$  のなかにも現れている各変項  $\beta$  をある定項  $\alpha$  で置き換えた結果である  $\phi\alpha/\beta$  という形式の任意の論理式を推論してよい。

存在量子子の推論規則についても同様である。

## 8 量子子同値定理について

本研究では、普遍量子子と存在量子子との重要な関係を表現する同値定理についても証明を行った。同値定理は、次のようなものである。

・  $\neg x \neg Fx \quad xFx$

・  $\neg xFx \quad x \neg Fx$

・  $x \neg Fx \quad \neg xFx$

・  $xFx \quad \neg x \neg Fx$

これら四つの量子子同値定理は、述語計算の最も重要なくつつかの派生規則の基礎となるものである。

以上のような命題計算、述語計算における推論規則、派生規則、定理、同値定理を用いて、様々な論証形式の証明を本研究では行った。

## 9 形式論理のさらなる展開

本研究では、さらに述語計算をもととして進められていく研究の分野から、形式的算術についても理解を深めた。

### 9.1 関数記号を伴う述語計算

関数記号とは、一個以上の名前あるいは他の指示表現にくつつくことで単一の対象を指示し、文法的に新しい名前として働くような表現を作りだす記号である。関数記号を付け加えることで述語計算を拡大することができる。ただし、表現が関数記号として扱われるのは、それを名前に適用して形成される表現が唯一の個体を指示するときに限る。

### 9.2 形式的算術

述語論理の語彙に一つの名前と三つの関数記号を付け加え、それらに対する特別な公理または推論規則を付け加えることで算術の体系が得られる。付け加えられる名前は “0” であり、関数記号は、“+”、“ $\cdot$ ”、“s” である。“+” は加法関数、“ $\cdot$ ” は乗法関数を指示し、“s” は「...の後続者」を意味する。ここでは、“0” 以外の数字を “s” と “0” から組み立てられた関数的表現の省略形として扱い、“ $2+2=4$ ” などを形式的算術の定理として証明を行った。

## 参考文献

- [1] John Nolt/Dennis Rohatyn 共著:現代論理学 (I), オーム社出版 (1995)
- [2] John Nolt/Dennis Rohatyn 共著:現代論理学 (II), オーム社出版 (1995)