様相論理の形式体系

2002MM001 安藤 慎祐
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

小野 [1] の第 4 章で様相論理における体系の比較の問題が練習問題として紹介されている。比較の対象となる 2 つの体系のうち、1 つは公理型を加えることにより定義され、もう 1 つは推論規則を加えることにより定義される。そして具体的には 2 つの体系が本質的に同じ証明能力を持つことを問題としている。

本研究では、様相論理の中でも正規な様相論理のみに絞り、公理型を用いて定義された体系に対し、それと本質的に同じ証明能力をもつ体系を推論規則を用いて定義することを目的とする。 具体的には、正規様相論理 K に 3 つの公理型 T,4,5 のいくつかを加えてできる体系を扱う。

2　様相論理

この節では様相論理について必要な定義を行う。

定義2.1 論理式を次のように帰納的に定義する。 (1) それぞれの命題変数は論理式である。
(2)A、B がともに論理式ならば $(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \supset B)$,$(\neg A)$,$(\Box A)$ はいずれも論理式である。

シークエントとは $A_1,\cdots,A_m \to B_1,\cdots,B_n$ という形をした表現である。ただし、おのおのの A_i および B_j は論理式である。ここで m や n は 0 でもよい。

様相論理の体系 K は、古典命題論理のシークエント計算の体系 LK に □ に関する推論規則をつけ加えたものであり、厳密には次の K の公理と K の推論規則を用いて定義される。

D を任意の論理式とするとき、D → D の形のシークエントだけが K の公理である。

K の推論規則

(weakening 左) $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}$　(weakening 右) $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A}$

(contraction 左) $\dfrac{A, A, \Gamma \to \Delta}{A, \Gamma \to \Delta}$　(contraction 右) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$

(exchange 左) $\dfrac{\Gamma, A, B, \Pi \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \to \Delta}$　(exchange 右) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Sigma}$

(cut) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad A, \Pi \to \Sigma}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma}$

($\wedge$ 左 1) $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}$　($\wedge$ 左 2) $\dfrac{B, \Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}$

($\wedge$ 右) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B}$　($\vee$ 左) $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta \quad B, \Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}$

($\vee$ 右 1) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}$　($\vee$ 右 2) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}$

($\supset$ 左) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A \quad B, \Pi \to \Sigma}{A \supset B, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma}$　($\supset$ 右) $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}$

($\neg$ 左) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta}$　($\neg$ 右) $\dfrac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$

($\Box$) $\dfrac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}$

ただし、Γ,Π,Σ,Δ は論理式の有限列であり Γ が $B_1,\cdots,B_m$ のとき $\Box\Gamma$ は $\Box B_1,\cdots,\Box B_m$ を表すとする。

定義2.2 (証明図とその終式) 証明図およびその証明図の終式を次のように帰納的に定義する。

(1)K の公理はそれだけで証明図であり、その証明図の終式はその公理自身である。

(2)P_1(および P_2) はそれぞれ S_1(および S_2) をその終式とする証明図とする。さらに

$$\frac{S_1}{S} \quad (\text{または} \frac{S_1 \quad S_2}{S})$$

が K の推論規則の一つであれば

$$\frac{P_1}{S} \quad (\text{または} \frac{P_1 \quad P_2}{S})$$

は証明図でありその終式は S である。

定義2.3 (K の証明可能性) シークエント S を終式とするような証明図が存在するときには S は K で証明可能であるという。

次に K 以外の様相論理を定義する。
いくつかの論理式の型 $X_1,\cdots,X_k$ に対し、始式として

$$\to X_i (i{=}1,\cdots,k)$$

を体系 K につけ加えることにより、新しい様相論理を定義することができる。このようにして定義される様相論理を $\mathrm{K}X_1\cdots X_k$ と表す。またこれらの $X_1,\cdots,X_k$ をこ

の様相論理の公理型という。ここで代表的な公理型は、T:$\Box A \supset A$, 4:$\Box A \supset \Box\Box A$, 5:$\Diamond A \supset \Box\Diamond A$ の 3 つである。様相論理 KT4 および KT5 はしばしば S4 および S5 とよばれる。

3 S5 と S5*

この節では小野 [1] の問 4.6 の解を与える。

定理3.1(問 4.6) 体系 LK に 2 つの推論規則

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}(\Box 左) \quad \frac{\Box\Gamma \to \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box A}(\Box 右 - S5)$$

を加えてできる体系を S5*とするとき、任意のシークエント S に対して次がいえる。

S は S5 で証明可能 $\Leftrightarrow$ S は S5*で証明可能

定理 3.1 を証明するために次の補助定理を示す。この補助定理は、P の構成に関する帰納法で証明できる。

補助定理3.2
(1)S を終式とする S5 の証明図 P があるとき、S は S5*で証明可能である。
(2)S を終式とする S5*の証明図 P があるとき、S は S5 で証明可能である。

4 KT,K4,K5

この節では K に T,4,5 のいずれか 1 つを加えた体系すなわち KT,K4,K5 について考える。

定義4.1 (1) 体系 LK に 2 つの推論規則

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}(\Box 左) \quad \frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box)$$

を加えてできる体系を KT*とする。
(2) 体系 LK に推論規則

$$\frac{\Gamma, \Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box - K4)$$

を加えてできる体系を K4*とする。
(3) 体系 LK に推論規則

$$\frac{\Gamma \to \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box A}(\Box - K5)$$

を加えてできる体系を K5*とする。
これら KT*,K4*,K5*は、既に知られた体系である。

定理4.2 任意のシークエント S に対して次がいえる。
(1)S は KT で証明可能 $\Leftrightarrow$ S は KT*で証明可能
(2)S は K4 で証明可能 $\Leftrightarrow$ S は K4*で証明可能
(3)S は K5 で証明可能 $\Leftrightarrow$ S は K5*で証明可能

定理 4.2 は補助定理 3.2 と同様な補助定理を示すことで証明できる。

5 KT4,K45

この節では複数の公理型を加えた体系について考える。
T,4,5 のうち 2 つ以上を K に加えてできる体系には、KT4,KT5(S5),K45 がある。これらに対応するシークエント体系は 4 節で述べたことから容易に見つけることができる。すなわち、T,4,5 に対応する推論規則をそれぞれ ($\Box$左),($\Box-K4$),($\Box-K5$) とし、X_1,X_2 を T,4,5 のいずれかの異なる公理型としたとき、KX_1X_2 には K に X_1,X_2 に対応する推論規則を加えた体系が対応し、対応する 2 つの体系の証明能力が等しいといえる。KT5(S5) については 3 節で既に述べているので、この節では、KT4,K45 について詳しく述べる。
また、3 つの公理型 T,4,5 を加えてできる体系は KT45 である。対応するシークエント体系は LK に ($\Box$左),($\Box-K4$),($\Box-K5$) を加えることで得られるが、この体系は本質的に S5 と等しいので 3 節の S5*とも証明能力が等しいといえる。

定義5.1 (1) 体系 LK に 2 つの推論規則

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}(\Box 左) \quad \frac{\Box\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box 右 - S4)$$

を加えてできる体系を S4*とする (S4*は [1] で S4 に対応する体系として紹介されている)。
(2) 体系 LK に 2 つの推論規則

$$\frac{\Box\Gamma, \Pi \to \Box\Delta, A}{\Box\Gamma, \Box\Pi \to \Box\Delta, \Box A}(\Box - K45)$$

を加えてできる体系を K45*とする (K45*は Shvarts[2] で K45 に対応する体系として与えられている)。

定理5.2 任意のシークエント S に対して次がいえる。
(1)S は S4 で証明可能 $\Leftrightarrow$ S は S4*で証明可能
(2)S は K45 で証明可能 $\Leftrightarrow$ S は K45*で証明可能

定理 5.2 は補助定理 3.2 と同様な補助定理を示すことで証明できる。

参考文献

[1] 小野寛晰: 情報科学における論理, 日本評論社 (1994).
[2] Shvarts, Grigori F., Gentzen style systems for K45 and K45D, Logic at Botik '89 (Pereslavl cprime-Zalesskiy, 1989),pp. 245–256, Lecture Notes in Computer. Science., 363, Springer, Berlin, 1989.