タブローの方法による形式論理

2000MM048　九郎田 宏之

指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

本研究では、丹治 [1] にしたがって、タブローの方法の理解を深めることを目的とする。まず、命題論理におけるタブローの定義を理解し、[1] の 3 において、例題および練習問題としてあげられているすべての論理式をタブローの方法によって証明した。述語論理においても、[1] に従って、タブローの方法を数多く体験し、その理解を深めた。述語論理におけるタブローの健全性も理解した。

述語論理におけるタブローは本質的に命題論理におけるタブローを含んでいるので、この要旨では述語論理についてのみ述べる。

2　述語論理の論理式

はじめに、使用する記号を定義し、述語論理の論理式の形成規則を与える。

(使用する記号)

論理結合子　$\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$,$\neg$

量化子　$\forall$,$\exists$

個体変項　x,y,z,x_1,x_2,$\cdots$,y_1,y_2,$\cdots$, z_1,z_2,$\cdots$

個体パラメター　a,b,c,a_1,a_2,$\cdots$,b_1,b_2, $\cdots$,c_1,c_2,$\cdots$

(n 項) 述語記号　F,G,,F_1,F_2,$\cdots$,G_1,G_2, $\cdots$

x や y の及ぶ範囲を「個体領域」と呼ぶ。個体変項は量子化との関連のもとで使われることがあるが、個体パラメターについては、名前のようにふるまい量化は行われない。個体変項と個体パラメターを合わせて個体記号と呼ぶ。

(原子式)

Φ が n 項述語記号であり、t_1,t_2,$\cdots$,t_n が個体記号であるならば、$(\Phi t_1 t_2 \cdots t_n)$ は原子式である。

(論理式の形成規則)

(1) 原子式は論理式である。

(2) もし A が論理式であるならば、$\neg A$ は論理式である。

(3) もし A と B が論理式であるならば $(A\wedge B)$,$(A\vee B)$,$(A\rightarrow B)$ はすべて論理式である。

(4) もし A が論理式であり、t が個体変項であるならば、$(\forall t)A$,$(\exists t)A$ は論理式である。

以下では、論理式を A、B などの記号で表す。

3　述語論理のタブロー

この節では、タブローの定義をする。

3.1　タブローに現われる四つのタイプの論理式

$\top : A$ および $\bot$: A を符号付きの論理式と呼ぶ (以下では、符号付き論理式を論理式とする場合がある)。

以下に述語論理のタブローに現われる四つのタイプの (符号付きの) 論理式の定義をする。

(a) 直接帰結タイプの論理式

直接帰結タイプの論理式 α および、それに対応する α_1、α_2 を次のように定義する。

α	$\top$:$\neg A$	$\bot$:$\neg A$	$\top$:$A\wedge B$	$\bot$:$A\vee B$	$\bot$:$A\rightarrow B$
α_1	$\bot$:A	$\top$:A	$\top$:A	$\bot$:A	$\top$:A
α_2	$\bot$:A	$\top$:A	$\top$:B	$\bot$:B	$\bot$:B

α_1 と α_2 は α の「直接の帰結」であり、もし α が真であれば、$\alpha_1 \alpha_2$ も真であり、またその逆も成り立つ。

(b) 枝分かれタイプの論理式

枝分かれタイプの論理式 β および、それに対応する β_1、β_2 を次のように定義する。

β	$\bot$:$A\wedge B$	$\top$:$A\vee B$	$\top$:$A\rightarrow B$
β_1	$\bot$:A	$\top$:A	$\bot$:A
β_2	$\bot$:B	$\top$:B	$\top$:B

β_1 と β_2 は β からの「分岐」であり、もし β が真であれば、β_1 と β_2 のうち少なくとも一方が真であり、またその逆も成り立つ。

(c) 普遍タイプの論理式

必ずしも閉じていない論理式 A の中の個体変項 t のすべての自由な現われ (量化子の、どの現われの作用範囲にも入っていない現われ) を、個体パラメター s に置き換えてできる論理式、$A[t,s]$ と書くことにする。

s を個体パラメターとしたとき、普遍タイプの論理式 γ および、それに対応する $\gamma(s)$ を次のように定義する。

γ	$\top : (\forall t)A$	$\bot : (\exists t)A$
$\gamma(s)$	$\top : A[t,s]$	$\bot : A[t,s]$

(d) 存在タイプの論理式

s を個体パラメターとしたとき、存在タイプの論理式 δ および、それに対応する $\delta(s)$ を次のように定義する。

δ	$\top : (\exists t)A$	$\bot : (\forall t)A$
$\delta(s)$	$\top : A[t,s]$	$\bot : A[t,s]$

3.2　述語論理のタブローの定義

これまでの準備の上に立って、述語論理のタブローを以下のように定義する。

(述語論理の) タブローの定義

(符号付きの) 論理式 X のタブローとは、X から出発して、次の四つの操作を任意の回数 (0 回を含む) 適用した枝分かれ図である。

(a) 論理式 α を含む枝の先に、α_1 または α_2 を付け加える。
(b) 論理式 β を含む枝の先を、β_1 と β_2 に枝分かれさせる。
(c) 論理式 γ を含む枝の先に、$\gamma(s)$ を付け加える。但し、s は任意の個体パラメターである。
(d) 論理式 δ を含む枝の先に、$\delta(s)$ を付け加える。但し、s はその枝の中のいかなる論理式にも現われていない個体パラメターである。

次に閉じた枝と閉じたタブローについて定義する。

閉じた枝： 同じ論理式 A について、$\top$:A という形の論理式と $\bot$:A という形の論理式とを共に含む枝。
閉じたタブロー： すべての枝が「閉じた枝」であるタブロー。

論理式 A の証明とは、$\bot$: A の閉じたタブローのことである。また、A の証明があるとき、A は証明可能であるという。

3.3　タブローによる証明

以下に卒業研究で取りあげたいくつかのタブローによる証明から、ひとつの例をあげる。

(例 1)$[(\forall x)(\exists y)F_{xy}\wedge(\forall y)(\exists z)G_{yz}]\rightarrow(\forall x)(\exists y)(\exists z)(F_{xy}\wedge G_{yz})$

(1) $\bot$: $[(\forall x)(\exists y)F_{xy}\wedge(\forall y)(\exists z)G_{yz}]\rightarrow(\forall x)(\exists y)(\exists z)(F_{xy}\wedge G_{yz})$
(2) $\top$: $(\forall x)(\exists y)F_{xy}\wedge(\forall y)(\exists z)G_{yz}$ (1)
(3) $\bot$: $(\forall x)(\exists y)(\exists z)(F_{xy}\wedge G_{yz})$ (1)
(4) $\top$: $(\forall x)(\exists y)F_{xy}$ (2)
(5) $\top$: $(\forall y)(\exists z)G_{yz}$ (2)
(6) $\bot$: $(\exists y)(\exists z)(F_{ay}\wedge G_{yz})$ (3)
(7) $\top$: $(\exists y)F_{ay}$ (4)
(8) $\top$: F_{ab} (7)
(9) $\top$: $(\exists z)G_{bz}$ (5)
(10) $\top$: G_{bc} (9)
(11) $\bot$: $(\exists z)(F_{ab}\wedge G_{bz})$ (6)
(12) $\bot$: $F_{ab}\wedge G_{bc}$ (11)

(13)$\bot$: F_{ab} (12)	(14)$\bot$: G_{bc} (12)
$\times$	$\times$
(6),(8)	(9),(11)

4　述語論理における解釈と妥当性

ここでは、解釈と妥当性について定義する。

4.1　解釈

$e_1,e_2,\cdots,e_n$ を個体としたとき、n 項述語記号に個体領域に属する任意の n 個の個体の組$< e_1,e_2,\cdots,e_n >$を割り当てることを n 項述語記号の「解釈」と呼ぶ。さらに、個体パラメターに、個体領域の中の一つの個体を割り当てることを個体パラメターに対する「解釈」と呼ぶ。

解釈とは、無限個用意したすべての述語記号とすべての個体パラメターに対する解釈を、全部合わせたものを指す。

4.2　妥当性と充足可能性

以下に、妥当性と充足可能性の定義をする。

(定義 1) 妥当性

論理式 A が妥当であるとは、すべての個体領域でのすべての解釈において、A が真となることである。(A が真となる、は [1] の定義による)

(定義 2) 充足可能性

論理式 A が充足可能であるとは、少なくとも一つの個体領域での少なくとも一つの解釈において A が真となることである

また、論理式の集合 S が充足可能であるとは、少なくとも一つの個体領域での少なくとも一つの解釈において、S のすべての要素が (同時に) 真となることである。

4.3　充足可能性についての四つの事実

充足可能性についての四つの事実を挙げる。

＜１＞ もし S が充足可能であり、α が S に属するならば、$S\bigcup\{\alpha_1, \alpha_2\}$ は充足可能である。
＜２＞ もし S が充足可能であり、β が S に属するならば、$S\bigcup\{\beta_1\}$ と $S\bigcup\{\beta_2\}$ のうちの少なくとも一方は、充足可能である。
＜３＞ もし S が充足可能であり、γ が S に属するならば、任意の個体パラメター s について、$S\bigcup\{\gamma(s)\}$ は充足可能である。
＜４＞ もし S が充足可能であり、δ が S に属し、そして s が S のいかなる要素にも現われない個体パラメターであるならば、$S\bigcup\{\delta(s)\}$ は充足可能である。

5　述語論理における健全性

述語論理の健全性とは、

＜述語論理におけるタブローの方法によって証明される論理式はすべて、妥当な論理式である＞

ということである。健全性の証明は、4.3 の＜１＞～＜４＞より導くことができる。

参考文献

[1] 丹治信春：タブローの方法による論理学入門, 朝倉書店 (1999).