

# 自然演繹の体系とシーケントの体系

2000MM033 笠井 正輝

指導教員 佐々木 克巳

## 1 はじめに

本研究では、小野 [1] 第 6 章で述べられている自然演繹の体系とシーケントの体系の比較について、深く理解することを目的とする。具体的には [1] にしたがって、直観主義命題論理に対する自然演繹の体系 NJ とシーケントの LJ を定義し、それらの証明能力が本質的に同等であることの証明を理解する。同様に直観主義述語論理に対する 2 つの体系についても理解を深め、さらに古典命題論理と古典述語論理に対しても、その同等性を理解する。

各証明においては、[1] で省略されている部分や、練習問題になっている部分を補うことで、その理解を深めることができた。

また、述語論理についての議論は本質的に命題論理での議論を含むので、この要旨では述語論理の部分のみを述べる。

## 2 直観主義論理に対する体系

### 2.1 述語論理の論理式

述語論理の言語は次のものからなる。

- 論理結合子  $\wedge, \vee, \supset$
- 矛盾記号  $\perp$
- 量化記号  $\forall, \exists$
- 対象変数  $x, y, z, \dots$
- 対象定数  $c, d, \dots$
- 関数記号  $f, g, \dots$
- 述語記号  $P, Q, \dots$
- 補助記号  $(, ) , , (コンマ)$

定義 2.1 項を次のように定義する。

1. それぞれの対象変数、対象定数は項である。
2.  $f$  が  $m$  変数の関数記号、 $t_1, \dots, t_m$  が項であるならば、 $f(t_1 \dots, t_m)$  は項である。

定義 2.2 論理式を次のように定義する。

1.  $P$  が  $n$  変数の述語記号、 $t_1, \dots, t_n$  が項であるならば、 $P(t_1, \dots, t_n)$  は論理式である (この形の論理式を原始論理式という)。
2.  $A, B$  がともに論理式であるならば、

$$(A \wedge B), (A \vee B), (A \supset B)$$

はいずれも論理式である。

3.  $A$  が論理式で、 $x$  が対象変数ならば、

$$(\forall x A), (\exists x A)$$

はともに論理式である。

### 2.2 自然演繹の体系 NJ

体系 NJ に公理はなく、推論規則だけである。体系 NJ の推論規則は  $\supset, \wedge, \vee, \forall, \exists$  についての導入と除去の規則からなり、そのほかに矛盾  $\perp$  についての規則がある。ここでは例として  $\supset$  についての除去 ( $\supset E$ ) を挙げる。

$$\frac{A \quad A \supset B}{B} (\supset E)$$

#### NJ の証明図とその結論

NJ の推論規則を繰り返し適用することにより得られる木の形をした図式を NJ の証明図という。ただし、推論規則の適用が 0 回の場合、つまり  $B$  だけでも NJ の証明図である。証明図の一番下の論理式をこの論理式の結論という。また、論理式  $A$  と論理式の有限集合  $S$  に対し、NJ の証明図  $P$  の取り除かれていない仮定が全て  $S$  に属し、さらに  $P$  の結論が  $A$  のとき、 $P$  は仮定  $S$  から  $A$  に到る証明図であるという。仮定  $S$  から  $A$  に到る NJ の証明図が存在するとき  $S \vdash_{NJ} A$  とかく。

#### NJ の証明可能性

仮定がすべて取り除かれているような NJ の証明図  $P$  の結論が  $A$  であるとき、 $P$  は  $A$  に至る NJ の証明図であるという。  $A$  に至る NJ の証明図が存在するとき、 $A$  は NJ で証明可能であるという。

### 2.3 シーケント体系 LJ

体系 LJ での証明可能性は、式と呼ばれる表現をもとに、公理に相当する始式と、推論規則を用いて定義される。

#### LJ の式

LJ の式は次の形である。

$$A_1, \dots, A_m \rightarrow B$$

ただし  $m$  は 0 でもよく、また右辺の  $B$  はなくてもよい。上の式の直観的な意味は  $A_1$  から  $A_m$  までを仮定すると  $B$  が導かれることを表している。また、論理式の有限列を表すのに  $\Gamma, \Delta$  を用いる。

#### LJ の始式

LJ の始式は次の 2 つである。

$$A \rightarrow A \quad \perp \rightarrow$$

#### LJ の推論規則

LJ の推論規則には、構造に関する推論規則として (weakening 左)、(contraction 左)、(exchange 左)、(cut) がある。論理結合子  $\wedge, \vee, \supset$  に対しては、それぞれ左

と右の推論規則があり、場合によっては、左と右の推論規則のどちらかが2つの規則からなることがある。また量化記号  $\forall, \exists$  に対しても、それぞれ左と右の推論規則がある。ここでは例として  $\forall$  の右の規則、( $\forall$  右 1) と ( $\forall$  右 2) を挙げる。

$$\frac{\Gamma \rightarrow A}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \text{ (}\forall\text{右 1)} \quad \frac{\Gamma \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \vee B} \text{ (}\forall\text{右 2)}$$

#### LJ の証明図とその終式

始式から出発し、それに LJ の推論規則を次々に適用していく過程をすべて記述したものを LJ の証明図という。証明図の一番下にある式を、その証明図の終式という。

#### LJ の証明可能性

式  $S$  を終式とする LJ の証明図が存在するとき、 $S$  は LJ で証明可能であるという。またそのような証明図を  $S$  の証明図、または  $S$  に到る証明図という。式  $\rightarrow A$  が LJ で証明可能であるとき、論理式  $A$  が LJ で証明可能であるという。

### 3 NJ と LJ

体系 NJ は直観主義命題論理の体系である。[1] によれば、このことは次の定理 3.1 により保証される。この節ではこの定理 3.1 の証明の概略を述べる。

**定理 3.1** 任意の論理式  $A$  に対し、 $A$  が NJ で証明可能であるときまたそのときに限り  $A$  は LJ で証明可能である。

定理 3.1 を示すために次の2つの補助定理を示す。

**補助定理 3.1**  $\Gamma$  を論理式の有限列、 $B$  を論理式とし、さらに  $Q$  を式  $\Gamma \rightarrow B$  に到る LJ の証明図とする。このとき、 $\tilde{\Gamma} \vdash_{NJ} B$  である。ただし、 $\tilde{\Gamma}$  は  $\Gamma$  に含まれる論理式全体の集合とする。 $B$  が空のとき、すなわち式  $\Gamma \rightarrow$  に対しては  $\tilde{\Gamma} \vdash_{NJ} \perp$  をとるものとする。

**補助定理 3.2**  $S$  を論理式の有限集合、 $B$  を論理式としさらに  $P$  を  $S$  から  $B$  に到る NJ の証明図とする。このとき、LJ の式  $S^* \rightarrow B$  が LJ で証明可能である。ただし、 $S^*$  は  $S$  の属す論理式を適当な順で一列に並べたものとする。

補助定理 3.1 において  $\Gamma$  を空列にした場合、および補助定理 3.2 において  $S$  を空集合とした場合を考えれば定理 3.1 が得られる。

### 4 古典論理に対する体系

この節では、古典論理に対する体系として自然演繹の体系 NK を導入し、次にシークエント体系 LK を導入する。

#### 4.1 自然演繹の体系 NK

古典論理に対する自然演繹の体系を得るためには、体系 NJ にさらに次の推論規則 (RAA) を付け加えればよい。

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg A] \\ \vdots \\ \perp \\ A \end{array}}{} \text{ (RAA)}$$

この推論規則は「 $\neg A$  を仮定して矛盾が生ずるときには  $A$  が導かれる」こと、すなわち背理法 (reductio ad absurdum) を表す。そのためにその頭文字をとって (RAA) と表される。このようにして得られた体系を NK という。NK の証明図および NK での証明可能性は NJ の場合と同様に定義される。なお、仮定  $S$  から  $A$  に到る NK の証明図が存在するとき  $S \vdash_{NK} A$  とかく。

#### 4.2 シークエント体系 LK

LK の式は次の形である。

$$A_1, \dots, A_m \rightarrow B_1, \dots, B_n$$

ただし、 $m$  や  $n$  は 0 でもよい。

#### LK の始式

LK の始式は LJ の場合と同じである。

#### LK の推論規則

LK の推論規則は、LJ の式のように右辺に現れる論理式の数に制限が無い。結果として、LK の推論規則において式の右辺を制限すると LJ の推論規則になる、という性質を持っている。ここでは例として (weakening 右) を挙げる。

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Gamma \rightarrow \Delta, A} \text{ (weakening 右)}$$

また、LK の証明図と証明可能性は、LJ の場合と同様に定義される。

### 5 NK と LK

この節では、定理 3.1 に対応して次の定理 5.1 の証明の概略を述べる。

**定理 5.1** 任意の論理式  $A$  に対し、 $A$  が NK で証明可能であるときまたそのときに限り  $A$  は LK で証明可能である。

定理 5.1 は定理 3.1 と同様に示すことができる。ただし、LJ の場合と違い LK の式の右辺に現れる論理式が列の形をとり得ることから、補助定理 3.1 に対応する補助定理を次の補助定理 5.1 のようにして示さなければならない。

**補助定理 5.1**  $\Gamma$  を論理式の有限列、 $\Delta$  を論理式の列とし、さらに  $Q$  を式  $\Gamma \rightarrow \Delta$  に到る LK の証明図とする。このとき、 $\tilde{\Gamma} \vdash_{NK} \Delta^*$  である。ただし、 $\tilde{\Gamma}$  は  $\Gamma$  に含まれる論理式全体の集合とする。また、論理式の列

$$A_1, \dots, A_k$$

を  $\Delta$  とするとき、 $\Delta^*$  は論理式

$$A_1 \vee \dots \vee A_k$$

を表す。ただし、 $k = 0$  のときは  $\Delta^* = \perp$  としておく。

#### 参考文献

[1] 小野寛晰：情報科学における論理，日本評論社 (1994)。