述語論理における完全性定理について

2002MM032 伊藤 寛之

指導教員　宮元 忠敏

1　はじめに

本研究では、論理学における 2 つの側面－セマンティクスとシンタクス－の間に成立する関係、つまり健全性と完全性について考察する。

セマンティクス (意味論) とは、「記号の意味にかかわる現象を扱う部門」であり、シンタクス (構文論) とは、「記号の意味を無視して、言語を純粋に図形の連なりとして捉える立場」である (戸田山 [2])。ここでの意味とは、数学的な正しさを意味し、構文とは数学における証明の形式化を意味する。証明を形式化すれば、それは機械的な手続きとなり意味を考える必要はなくなる。従って、セマンティクスとシンタクスは対照的なものである。しかし、この両者の間に成立する完全性定理により、両者は概念の「広がりにおいて一致する」ことが証明される (戸田山 [2])。つまり、完全性定理はセマンティクスとシンタクスを繋ぐ役割を果す定理と言える。

2　諸定義

記法等はすべて Enderton [1] に従う。ここでは、主要な事柄のみを述べておく。

述語論理の言語として、次のものを与える。

- 括弧： (,)
- 接続記号： $\rightarrow, \neg$
- 変数 (可算無限個)： $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots$
- 等号： $=$
- 量化子： $\forall$
- 述語記号： 各正整数 n に対し、n 変数述語記号と呼ばれる記号の集合 (空の場合もある)
- 定数記号： 記号のある集合 (空の場合もある)
- 関数記号： 各正整数 n に対し、n 変数関数記号と呼ばれる記号の集合 (空の場合もある)

定義　**構造**$\mathfrak{A}$ とは、次の成分を持つものである。

1. $\mathfrak{A}$ の**ユニバース**(*universe*) と呼ばれる空でない集合 $|\mathfrak{A}|$
2. 各 n 変数述語記号 P に対して、n 対関係 $P^{\mathfrak{A}} \subseteq |\mathfrak{A}|^n$
3. 各定数記号 c に対して、$|\mathfrak{A}|$ の要素 $c^{\mathfrak{A}}$
4. 各 n 変数関数記号 f に対して、n 変数関数 $f^{\mathfrak{A}} : |\mathfrak{A}|^n \rightarrow |\mathfrak{A}|$

φ と $\mathfrak{A}$ をそれぞれ論理式、構造とし、$s : V \rightarrow |\mathfrak{A}|$ を全ての変数の集合 V から $|\mathfrak{A}|$ への関数とする。

定義　s を拡張させた関数 $\overline{s} : T \rightarrow |\mathfrak{A}|$ は次のように再帰的に定義される (T は項全体の集合)。

1. 各変数 x に対し、$\overline{s}(x) = s(x)$
2. 各定数記号 c に対し、$\overline{s} = c^{\mathfrak{A}}$
3. $t_1, \ldots, t_n$ が項であり、かつ f が n 変数関数記号であるならば、$\overline{s}(ft_1, \ldots, t_n) = f^{\mathfrak{A}}(\overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n))$

次に、$\mathfrak{A}$ が s で φ を**充足させる**($\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ と書く) ということが意味することを定義する。

定義　$\models_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ は次のように再帰的に定義される。

1. φ が原子式の場合
   (a) φ が $= t_1 t_2$ という形のとき、
   $\models_{\mathfrak{A}} = t_1 t_2[s] \Leftrightarrow \overline{s}(t_1) = \overline{s}(t_2)$
   (b) φ が $Pt_1 \ldots t_n$ という形のとき、
   $\models_{\mathfrak{A}} Pt_1 \ldots t_n[s] \Leftrightarrow \langle \overline{s}(t_1), \ldots, \overline{s}(t_n) \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$
2. φ が $\neg\alpha$ という形のとき、$\models_{\mathfrak{A}} \neg\alpha[s] \Leftrightarrow \not\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$
3. φ が $(\alpha \rightarrow \beta)$ という形のとき、
   $\models_{\mathfrak{A}} (\alpha \rightarrow \beta)[s] \Leftrightarrow \not\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ または $\models_{\mathfrak{A}} \beta[s]$
4. φ が $\forall x \alpha$ のとき、$\models_{\mathfrak{A}} \forall x \alpha[s] \Leftrightarrow$ 全ての $d \in |\mathfrak{A}|$ に対して、$\models_{\mathfrak{A}} \alpha[s(x|d)]$

   但し、$s(x|d)(y) = \begin{cases} s(y) & y \neq x \text{ の時} \\ d & y = x \text{ の時} \end{cases}$

定義　Γ を論理式の集合、φ を論理式とする。Γ の全ての要素を s で充足させるような全ての構造 $\mathfrak{A}$ と関数 $s : V \rightarrow |\mathfrak{A}|$ に対して、$\mathfrak{A}$ がまた s で φ を充足させるとき、Γ が φ を**論理的に含意する**($\Gamma \models \varphi$ と書く) という。

また、Γ のすべての要素を充足させるような構造 $\mathfrak{A}$ と s が存在するとき、Γ は**充足可能**であるという。

形式体系として、次のものを用意する。

推論規則(モダスポネンス)：

$$\frac{\alpha, \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

論理的公理Λ(以下の形の論理式の一般化の全体)：

1. トートロジー
2. $\forall x\, \alpha \rightarrow \alpha_t^x$ 但し、α において t は x と置き換え可能 (α_t^x は α に自由に出現する変数 x を項 t で置き換えることを意味する)
3. $\forall x\, (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall x\, \alpha \rightarrow \forall x\, \beta)$
4. $\alpha \rightarrow \forall x\, \alpha$ 但し、x は α に自由に出現しない
5. $x = x$
6. $x = y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$ 但し、α は原子式であり、α' は y によって 0 箇所以上 x と置き換えることで α から得られる

定義　各 $k \leq n$ に対し、次のいずれかを満たす論理式の有限列 $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$, $\alpha_n = \varphi$ を Γ からの φ の**演繹**という。

1. $\alpha_k \in \Gamma \cup \Lambda$
2. α_k は列の中の前の 2 つの論理式からモダスポネンスによって得られる。

このような演繹が存在するとき、φ は Γ から**演繹可能**であるといい $\Gamma \vdash \varphi$ と書く。また、$\Gamma \vdash \varphi$ かつ $\Gamma \vdash \neg\varphi$ となる φ が存在しないとき、Γ は**無矛盾**であるという。

3　完全性定理

以下では、完全性定理 (健全性、完全性) の可算言語での証明の概略を述べる。

定理 1 (健全性) $\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \Gamma \models \varphi$

証明 φ の演繹の長さに関する帰納法により示される。■

定理 2 (完全性)

(a) $\Gamma \models \varphi \Rightarrow \Gamma \vdash \varphi$
(b) いかなる無矛盾な集合も充足可能である。

(a)⇔(b) であることが分かるから、(b) を示す。

証明 論理式の集合 Γ を任意に固定し、Γ は無矛盾であるとする。この Γ が充足可能であることを示せばよい。以下のように 6 ステップに分けて証明を考えていく。まず、初めの 3 ステップで Γ を Δ に拡大させる。

Step1:　言語を拡張する。言語に可算無限個の定数記号を加える。このように言語を拡張しても Γ は無矛盾のままである。

Step2:　各 φ(新しい言語での論理式) と各変数 x に対し、$\neg\forall x\, \varphi \to \neg\varphi^x_c$ という形の論理式 (このような論理式の集合を Θ とする) を Γ に加える。ここで、c は新しい定数記号のうちの 1 つとする。この Γ の拡大 $\Gamma \cup \Theta$ も無矛盾であることが示される。

Step3:　$\Gamma \cup \Theta$ を極大な集合 Δ に拡大する (その方法についてはここでは省略する)。Δ が極大であるとは、いかなる論理式 φ に対しても $\varphi \in \Delta$ か $\neg\varphi \in \Delta$ のどちらか一方になるという意味である。そして、Δ も無矛盾となる。

次に、この Δ を充足させるような構造 $\mathfrak{A}$ をつくる。但し、等号は E で置き換えることにする (φ に出現する等号を E で置き換えた論理式を φ^* で表す)。

Step4:　$\mathfrak{A}$ は次のような構造である。

(a)　$|\mathfrak{A}| =$ 新しい言語における項の全体
(b)　$uE^{\mathfrak{A}}t \Leftrightarrow u = t \in \Delta$
(c)　各 n 変数述語記号 P に対し、
$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}} \Leftrightarrow Pt_1 \ldots t_n \in \Delta$
(d)　各 n 変数関数記号 f に対し、
$f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) = ft_1 \ldots t_n$
定数記号 c については $c^{\mathfrak{A}} = c$ とし、
関数 $s : V \to |\mathfrak{A}|$ を $s(x) = x$ とする。

このように構造を定義することにより、任意の項 t に対して $\overline{s}(t) = t$ となることが簡単に示される。つまり、構造 $\mathfrak{A}$ においては、項に対して項自身がその解釈として割り当てられるということになる。そして、次のことが φ に関する帰納法により示される。

$$\models_{\mathfrak{A}} \varphi^*[s] \Leftrightarrow \varphi \in \Delta$$

これで言語に等号が含まれていなければ、($\varphi^* = \varphi$ だから) 証明は (ほぼ) 完了するが、今、言語に等号が含まれていることを仮定しているので他の構造を用意する必要がある。そこで、$E^{\mathfrak{A}}$ による $\mathfrak{A}$ の商構造 (quotient structure)$\mathfrak{A}/E$ を構成する。その前に次のことを確認する。ここで、各 $t \in |\mathfrak{A}|$ に対し、$[t]$ をその同値類とする。

1. $E^{\mathfrak{A}}$ は $|\mathfrak{A}|$ 上の同値関係である。
2. 各述語記号 P に対し、$P^{\mathfrak{A}}$ は $E^{\mathfrak{A}}$ と両立する (compatible)。つまり、
$\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$ かつ $t_i E t'_i (1 \leq i \leq n) \Rightarrow \langle t'_1, \ldots, t'_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$
3. 各関数記号 f に対し、$f^{\mathfrak{A}}$ は $E^{\mathfrak{A}}$ と両立する。つまり、
$t_i E^{\mathfrak{A}} t'_i (1 \leq i \leq n) \Rightarrow f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n) E^{\mathfrak{A}} f^{\mathfrak{A}}(t'_1, \ldots, t'_n)$

Step5:　構造 $\mathfrak{A}/E$ は次のように構成される。

(a)　$|\mathfrak{A}/E| = |\mathfrak{A}|$ の要素の同値類全ての集合
(b)　各 n 変数述語記号 P に対し、
$\langle [t_1], \ldots, [t_n] \rangle \in P^{\mathfrak{A}/E} \Leftrightarrow \langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in P^{\mathfrak{A}}$
(c)　各 n 変数関数記号 f に対し、
$f^{\mathfrak{A}/E}([t_1], \ldots, [t_n]) = [f^{\mathfrak{A}}(t_1, \ldots, t_n)]$
定数記号 c に対し、$c^{\mathfrak{A}/E} = [c^{\mathfrak{A}}]$ とし、関数 $h : |\mathfrak{A}| \to |\mathfrak{A}/E|$ を $h(t) = [t]$ とする。

$E^{\mathfrak{A}/E}$ は等号関係であることが分かる。つまり、

$$[t]E^{\mathfrak{A}/E}[t'] \Leftrightarrow [t] = [t']$$

となる。従って、構造 $\mathfrak{A}/E$ の下では E は普通の等号として解釈されることになる。そして、次が証明される。

$$\models_{\mathfrak{A}/E} \varphi[h \circ s] \Leftrightarrow \varphi \in \Delta$$

Step6:　最後に構造 $\mathfrak{A}/E$ を元の言語に制限する。このように制限をしても、Γ のいかなる要素も $h \circ s$ で充足される。■

参考文献

[1] Enderton, H. A Mathematical Introdution to Logic, Second Edition. Academic Press, 2002.
[2] 戸田山和久, 「論理学をつくる」 名古屋大学出版, 2002.