資産の効果的運用
–株をシミュレーションによって分析–

2002MM056 三宅　史彦

指導教員　國田　寛

1　はじめに

現在, 株式のように長い期間にわたって利益を上げるために, 数ある株式の中でどの株式にどれくらいの比率でどれくらいの量を投資することが最適なのかということ, リスクとリターンを考慮したうえで求めたいという投資家の人々が多く存在している．しかし, 確実性の低さという点が問題であり, どのように確実性を上げるかという方向や, いかにリスクを減らしリターンを増やすかという方向で解決が求められている.

上記の問題点について, 定式化したモデルを使い実際に数値実験をすることによって確率的な最適配分を求める方向で, この問題をシミュレーション型多期間確率計画モデルと捉え, その有効性を確認する.

2　シミュレーション型多期間確率計画モデルについて

- 多期間確率計画モデル : 計画期間中に設定された複数期間で資産価格変動の確率分布を想定し, 各時点で異なる投資決定をする問題を解くモデルである. 例えば, 計画期間を３年間と考え, １か月ごとに資産価格変動の確率分布を想定する場合には, ３６期間の確率変数の合成された分布に従うことになる. つまり, 期間を細かく区切り各時点の確率分布に従い各時点で意思決定を行い各時点で意思決定を行い問題を解く方法ということである.
- その中でも, 離散時間で離散分布に従う確率変数をモンテカルロ・シュミレーションにより発生させたパスを利用して不確実性を記述することによってモデル化し, 問題を解いていくモデルである.

2.1　まず, はじめにモデル化に用いる記号を示す.

(A) 添字

i : 経路パスを表す添字

(B) パラメータ

I : 経路の本数

$\mu_{jt}^{(i)}$: 期間 t の経路 i の危険資産 j の投資収益率

$(j=1,\cdots,n; t=1,\cdots,T; i=1,\cdots,I)$

r_0 : 期間１の金利 (０時点のコール・レート)

$r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t 経路 i の金利

$(t=2,\cdots,T; i=1,\cdots,I)$

W_0 : ０時点での富

W_E : 計画最終時点で投資家が要求する期待富

W_G : 計画最終時点での目標富

(C) 決定変数

w_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資比率

$(j=1,\cdots,n; t=0,\cdots,T-1)$

c_t : t 時点の現金の比率 $(t=0,\cdots,T-1)$

$W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富 $(t=1,\cdots,T; i=1,\cdots,I)$

$q^{(i)}$: 計画最終時点の経路 i の富の目標富に対する不足分 $(i=1,\cdots,I)$

x_{jt} : t 時点の危険資産 j の投資額

$(j=1,\cdots,n; t=0,\cdots,T-1)$

v_0 : ０時点の現金

$v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金 $(t=1,\cdots,T-1; i=1,\cdots,I)$

2.2　投資額決定モデルの定式化

$$\text{Minimize} \qquad \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)}$$

subject to

$$\sum_{j=1}^{n} x_{j0} + v_0 = W_0$$

$$W_1^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}(1+\mu_{j1}^{(i)})x_{j0} + (1+r_0)v_0 = \sum_{j=1}^{n} x_{j1} + v_1^{(i)}$$

$$(i=1,\cdots,I)$$

$$W_t^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}(1+\mu_{jt}^{(i)})x_{j,t-1} + (1+r_{t-1})v_{t-1} = \sum_{j=1}^{n} x_{jt} + v_t^{(i)}$$

$$(t=2,\cdots,T-1; i=1,\cdots,I)$$

$$W_T^{(i)} + q^{(i)} \geq W_G \qquad (i=1,\cdots,I)$$

$$x_{jt} \geq 0 \qquad (j=1,\cdots,n; t=0,\cdots,T-1)$$

$$v_0 \geq 0$$

$$v_t^{(i)} \geq 0 \qquad (t=0,\cdots,T-1; i=1,\cdots,I)$$

$$q^{(i)} \geq 0 \qquad (i=1,\cdots,I)$$

3 数値実験における設定条件

- ３期間
- シミュレーション経路：20 経路
- 対象資産：東証の株価指数より, 電気機器業界, 石油業界, 保険業界の三つとする.
- 次に示した各資産に対するデータの基本統計量を用いてシミュレーション経路を生成する.
- 各株式に２０万円以上４５万円以下という制約をつけた.
- これは, もともとどの株式がどのように変動するかわからないということから, すべての株式に２０万円以上は必ず投資することにした.
- シミュレーション経路の生成方法は, 以下のとおりである.
  1. 資産 j の期間 t の収益率は, 期待値 $\bar{\mu}_{jt}$, 標準偏差 σ_{jt} の正規分布に従う. また ε_{jt} を正規分布に従う確率変数とする. 正規乱数 $\varepsilon_{jt}^{(i)}$ を用いて, シミュレーション経路 i の資産 j の期間 t の収益率 $\mu_{jt}^{(i)}$ を次のように生成する.

$$\mu_{jt}^{(i)} = \bar{\mu}_{jt} + \sigma_{jt}\varepsilon_{jt}^{(i)}$$

$$(j = 0, \cdots, n; t = 1, \cdots, T; i = 1, \cdots, I)$$

- 初期富は１００万円とする.
- 計画期末の目標富は１００万円とする.
- 計画期末の要求期待富に対する制約を様々に変えることによって, どのような資産配分になるかを調べる.

4 実験結果

- 投資額決定モデルによって問題を解くと, 各期間におけるそれぞれの乱数における, 投資額の平均が最適な投資額となる.
- 問題を解くにあたって, プログラム内容を述べる.
  1. 各株式, 各期間にそれぞれ期待値と標準偏差を求める.
  2. 各株式, 各期間, ２０個のシミュレーション経路の収益率を求める.
  3. 各株式, 各期間, ２０個のシミュレーション経路の収益率＋１を求める.
  4. 各株式, 各期間, ３種類×乱数２０個×３期間の１８０個の投資額の配分を変化させるセルにする.
  5. そのうえで, 制約式は, 次のように設定する.
     (a) 各投資額は２０万円より大きく４５万円より小さいという制約.
     (b) 期間０での三つの和は初期富にあたるので１００万円になるという制約.
     (c) 期間１での三つの和は計算を簡単にするために, 期間０の各時点での富の平均と同じになるという制約.
     (d) 期間２での三つの和は計算を簡単にするために, 期間１の各時点での富の平均と同じになるという制約.
  6. 目標富ー最終富で目標富に対する不足分が出る. ２０個の乱数に対して２０個の不足分がでるので, 平均値を出しその値を目的セルとし, その値の最小値を求める.
  7. すると, 各期間, 各株式, 乱数２０個に対しての合計１８０個の投資額の最適配分が出る.
  8. 各期間, 各株式に２０個ずつ出た投資額の平均が各期間における各株式への最適投資額である.

5 考察

- 1,000,000 円を使ってリスクを最小化しながら投資していった結果期待できる利益は約 16,000 円であった. この値は現実でいってもあまりたいした額ではない. やはり株で生きていくほど稼ぐためには１億円ほどの軍資金が必要ということだと考えられる. そうすれば, 期待利益も約 1,600,000 円となり大きな利益が生まれる.
- 電気機器業界はこの３年間では常に高い株価を示していたため投資額が大きい結果になった. 石油業界は１２月に株価が上昇する結果が出ている. このことから株価は数値計算だけではなく月日, 年代によっての需要など環境によっても影響を受けることがわかった.
- 投資量で考えるより, 投資額で考えたほうが理解しやすいと思われる.

6 おわりに

本研究をまとめると, ある期間にわたって利益を上げるために, 数ある株式の中でどの株式にどれくらいの金額を投資することが最適なのかということは数値計算できた. しかし, もう少し実用性のことも検討する必要があり, 今後の課題として残っている.

参考文献

[1] 東証：株価指数ヒストリカルグラフ

http://quote.tse.or.jp/tse/quote.cgi?F=histidx/

[2] 無題：正規乱数の発生

http://aoki2.si.gunma-u.ac.jp/calculator/nrand.html

[3] 批々木 規雄：金融工学と最適化, 朝倉書店 (2001).