時系列におけるファイナンス分析

2002MM052 前田直宏
指導教員　國田寛

1　はじめに

現在，時系列モデルについて，最適なモデルの推定に関しては代表的にAIC(赤池情報量基準)を用いる方法，SIC(シュワルツ情報量基準)を用いる方法があり，S-plus，R，ITSMなどの計算ソフトを使ってAIC，SICの値を求めることで最適なモデルが選択できる．

本研究においては，株式の収益率とボラティリティに関して，データとしてTOPIX(付録A1：2005．9．1〜2005．12．28)を用い，ITSMを使ってAICの値を求めることにより最適なモデルを選択する．また，日経平均株価(A2：2005．9．1〜2005．12．28)も同様の分析をし，比較，考察していく．

2　収益率に関するARモデル

収益率x_tは，p期前までの収益率に依存するものとすると，その関係は，

$$x_t=\phi_1 x_{t-1}+\phi_2 x_{t-2}+\cdots+\phi_p x_{t-p}+\epsilon_t$$

ただし，ϵ_tはホワイトノイズであり，

$$E(\epsilon_t)=0$$
$$Var(\epsilon_t)=\sigma^2<\infty$$
$$Cov(\epsilon_t,\epsilon_{t-s})=0, s\neq 0$$

である．このように表すことができるモデルをp次の自己回帰モデルとよび，AR(p)と表す．

3　ボラティリティ変動モデル

ボラティリティ変動モデルでは,予想不可能なショックϵ_tを,次式のように,必ず正の値をとる変数σ_tと平均０,分散１の過去と独立かつ同一な分布に従う確率変数z_tとの積として表す．

$$\epsilon_t=\sigma_t z_t, \sigma_t>0, z_t \sim \text{i.i.d.}, E(z_t)=0, Var(z_t)=1$$

ここで,$z_t \sim$ i.i.d.はz_tが過去と独立かつ同一な分布に従うことを表している.また,σ_tとz_tはお互いに独立であるとする.このように定式化すると,z_tが同じ値であっても,σ_tが大き(小さ)ければϵ_tの絶対値は大き(小さ)くなる．

ARCH型モデルは,t期のボラティリティをt-1期にすでに値がわかっている変数だけの関数として定式化する．ここでは,次式のようにボラティリティσ^2_tを過去の収益率の予期せざるショックの２乗の線形関数として定式化する．

$$\sigma^2_t=\omega+\alpha_1\epsilon^2_{t-1}+\alpha_2\epsilon^2_{t-2}+\cdots+\alpha_q\epsilon^2_{t-q}$$

よって,σ^2_tはt-1期に値がわかることになる．

4　ユールウォーカー法

代表的なモデルの推定方法として，ユール・ウォーカー法，バーグ法などが知られている．ここでは，ユール・ウォーカー法でのARモデルの推定について説明する．

いま，AR(p)モデルが,

$$x_t=\sum_{i=1}^{p}\phi_i x_{t-i}+\epsilon_t \ (\epsilon_t\text{の分散}\sigma^2\text{，平均}\mu)$$

であるとき，k次の自己共分散

$$\gamma(k)=E((x_t-\mu)(x_{t-k}-\mu))(=Cov(x_t,x_{t+k}))$$

は，ユール・ウォーカー方程式

$$\gamma(0) = \sum_{i=1}^{m}\phi_i\gamma(i)+\sigma^2 \quad (1)$$
$$\gamma(j) = \sum_{i=1}^{m}\phi_i\gamma(j-i) \quad (2)$$

をみたす．逆に，時系列のデータが得られると，標本自己共分散

$$\hat\gamma(k)=\frac{1}{N}\sum_{t=k+1}^{N}(x_t-\tilde\mu)(x_{t-k}-\tilde\mu)$$

を(1)，(2)に代入することにより($\hat\phi_i$:$i=1,2,\cdots,p$)を推定し，σ^2の推定値

$$\hat\sigma^2=\hat\gamma(0)-\sum_{i=1}^{p}\hat\phi_i\hat\gamma(i) \quad (3)$$

によってこれら$\hat\phi_1,\hat\phi_2,\cdots,\hat\phi_i,\hat\sigma^2$という値からモデルを推定することをユール・ウォーカー推定という．

5　次数選択

ARモデルを用いた時系列分析では，モデルの次数pを特定化する必要がある．次数pが決まればパラメータを最小２乗法によって推定すればよい。モデルの次数撰択は情報量基準とよばれる指標に基づいて機械的に行われることが多い．情報量基準として最も有名なものは，AICであり，

$$\text{AIC}=\ln\hat\sigma^2+\frac{2p}{T}$$

ここで，$\hat\sigma^2$は，(3)で与えられる．

もう１つよく用いられる情報量基準に，SICがあり

$$\text{SIC}=\ln\hat\sigma^2+\frac{pln(T)}{T}$$

AICとの違いは，次数pを増やすことに対するペナルティーが，AICでは２/Tであったのに対して，SICではln(T)/Tと，より大きなペナルティーが課されていることである．その結果，SICによって次数を選ぶと，AICよりも低めの次数が選ばれることが多い．

6　データの分析

6.1　分析方法

分析には，ITSM2000という計算ソフトを使用する．ARモデルについてはユール・ウォーカー法，バーグ法の２つを使用する．また,AICに関しては、AICCと呼ばれるAICの偏りを修正したものを用いる．最終目的はAICCができるだけ小さくなるモデルを求めることである．データはTOPIXを用いる．日経平均株価も同様の分析をする．また，日経平均株価のデータをTOPIX・日経平均株価の平均値で補正したものも同様の分析を行いTOPIXの分析結果との比較をする．

6.2　分析結果

分析結果は以下のとおりである．

TOPIX	αの値	βの値	WN	AIC
AR(Y-W)	0.951360	ー	289.864	678.589
AR(B)	1.176077 -0.188419	ー	231.628	664.629
ARCH	205.981 0.088463	ー	ー	658.390
GARCH	205.181 0.089050	0.002967	ー	660.607
日経平均	αの値	βの値	WN	AIC
AR(Y-W)	0.948548	ー	30176.8	1045.52
AR(B)	0.988441	ー	25102.8	1032.45
ARCH	21441.5 0.135715	ー	ー	1028.79
GARCH	21439.9 0.135715	0.000062	ー	1031.01
補正日経	αの値	βの値	WN	AIC
AR(Y-W)	0.948547	ー	325.161	687.612
AR(B)	0.988440	ー	270.492	674.542
ARCH	231.048 0.135684	ー	ー	670.878
GARCH	226.218 0.141524	0.012762	ー	673.047

※注

ARモデルでは，$x_t = \alpha x_{t-1} + \epsilon_t$又は$x_t = \alpha_1 x_{t-1} + \alpha_2 x_{t-2} + \epsilon_t$

ARCHモデルでは，$\sigma_t^2 = \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2$

GARCHモデルでは，$\sigma_t^2 = \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \epsilon_{t-2}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2$

WNは，ϵ_tの分散

7　考察

7.1　モデルの推定

AICCの値はそれぞれ 678.589 と 664.629 である.最終目的はAICCを最小にするモデルを求めることであるから,この場合の最適なモデルはバーグ法によって導き出されたAR(2)モデルであるということが分かる.また,ARCHモデルについては,ARCH(2),GARCHモデルについてはGARCH(2,1)モデルが最適であることが分かった.

7.2　分析結果の比較

TOPIX・日経平均株価それぞれの分析に使用したデータを見ると値の上昇・下降について連動していることが想像される.ここで,の分析結果を比較する.例えば,　ARモデル(ユール・ウォーカー法)の係数について見てみると,0.951360と0.948548であり,かなり近い値をとっている.ここから,日経平均株価の算出に用いられている株価の変動とTOPIXは相互に影響しあっている容易に分かる.

7.3　まとめ

AICというのは赤池情報量基準であり,データについてそれぞれが最適なモデルを判断するために必要な情報量を数値で表したものであり,現在の社会では情報は有料であり得られる情報量には限りがあることから考えるとAICの値がいちばん小さいモデルを選ぶことが最良ではある.しかし,今回のような４か月という短い期間ではなく,２０年や３０年といった長い期間のデータを分析するときにAR・ARCH・GARCHのそれぞれのAICCが今回のようにお互いが近い値になるようであれば,単純なモデルで考えることで複雑なモデルを考える労力・時間が浮くことから情報量の差を埋めるだけの利益が得られることもあるのではないかと推測する.

今回,TOPIX(2005.9.1～2005.12.28)について分析をしてARモデルなどで最適なモデルを選択することができた.変動に関して過去の値という内的要因に多少の依存関係はあるが,実際に値を大きく変動させるのは,国際情勢・気象状況などの外的要因である.最適なモデルを選択することはもちろんだが,外的要因を正確に予測することも値を推定するときに重要な要素である.

参考文献

[1] 渡部敏明：ボラティリティ変動モデル,　朝倉書店 (2004).

[2] 小暮厚之：ファイナンスへの計量分析,　朝倉書店 (2004).

[3] Peter J Brockwell,Richard A Davis：時系列解析と予測,シーエーピー出版 (2004).

[4] YAHOOファイナンス:TOPIX・日経平均株価データ (2005.9.1～2005.12.28)