アメリカンオプション
– 有限差分法によるアメリカンオプションの価格決定–

2002MM037 笠原 治久　　2002MM066 中野 洋平

指導教員　國田寛

1　はじめに

現在，日本を始め，アメリカやヨーロッパ，その他の地域の金融市場には大きな違いがあるものの，基本的な経済原則と数理モデルは世界中の金融市場に同じように適用されている．その中でオプションを扱った問題は，今日までに様々な研究がなされてきている．
満期前行使が可能なアメリカンオプションには多くの実際的な問題に対しては数値的な解法が必要である．私たちは，数値的な解法の中で差分近似について研究を行う．その過程で基本的な金融工学の知識，線形相補問題，変数変換，有限差分法について研究を進め最終的に有限差分法の直接法と間接法の収束速度と正確性を比較する．本研究では中野洋平が変数変換，有限差分法の直接法，間接法の LU 分解に関する部分を, 笠原治久が間接法の Gauss-Seidel 法と SOR 法，射影 SOR 法の部分を担当した. その他の部分は共同で行った.

2　$Black - Scholes$ 偏微分方程式の導出

まずに資産の収益率の変化ついて考える．ある時点 t において資産価格が S であるとする．収益率の変化 dS/S を予測可能で確定的な収益率と予期されない出来事による外部からの影響に起因する資産価格のランダムな変化の二つの要素であらわすと確率微分方程式

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt$$

が得られる. 次に，価格 $V(S,t)$ が S と t にのみ依存するオプションを考える．伊藤の補題を用いると

$$dV = \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t}\right)dt$$

と書ける. これは V が確率微分方程式に従うことを示す. ここで，オプション１単位と原資産 $-\Delta$ からなるポートフォリオを考える. このポートフォリオの価値は

$$\Pi = V - \Delta S$$

である.Π は確率微分方程式

$$d\Pi = \sigma S\left(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\right)dX + \left(\mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \frac{\partial V}{\partial t} - \mu\Delta S\right)dt$$

に従い，$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ とおくことでランダム性を除去できる. さらに市場に裁定機会がなければ，ポートフォリオの収益と無リスクの預金収益は等しくなるという条件から

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

という $Black - Scholes$ 偏微分方程式が得られる.

3　自由境界値問題

満期前の行使が許された場合

$$V(S,t) \geq \max(E - S, 0)$$

を課さなければいけないことが導かれる．アメリカンオプションでは各時間においてオプションの価値だけでなく，S の各値に対してオプションを行使するかどうかも決めなければいけない．これは自由境界値問題として知られている．

4　線形相補問題

デルタ・ヘッジをしたポートフォリオを考える．アメリカンオプションの場合，ポートフォリオの収益率が銀行預金の利子率を上回ることが出来ないという意味は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP \leq 0$$

という，$Black - Scholes$ 偏微分方程式を不等式化したものでる．アメリカンプットの問題は自由境界値問題として各時点 t に対して S 軸を二つの領域に分けなければいけない．第一の部分 $0 < \mathrm{S} < S_f(t)$ においては，満期前行使が最適であり

$$P = E - S$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP < 0 \tag{1}$$

が成立する．もう一つの領域 $S_f(t) < \mathrm{S} < \infty$ においては，満期前行使を行うのは最適とならず

$$P > E - S$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP = 0 \tag{2}$$

が成立する．$S = S_f(t)$ における境界条件は，P とその傾き Δ(デルタはポートフォリオの価値の変化) が連続で

$$P(S_f(t),t) = \max(E - S_f(t), 0)$$

$$\frac{\partial P}{\partial S}(S_f(t),t) = -1$$

が成立することである．ほとんどの場合，自由境界値問題の意味のある厳密解をみつけるのは不可能である．そのため，自由境界に具体的に依存しないように問題を再定式化する．一般に形式

$$AB = 0, \qquad A \geq 0, \qquad B \geq 0$$

をとる問題を相補問題と呼ぶ．この関係を使って (1)，(2) を線形相補問題として考えてみると

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\right.\\
&\left.+rS\frac{\partial P}{\partial S} - rP\right)(P - (E-S)^+) = 0\\
&\left(\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}\right) \geq 0\\
&(P - (E-S)^+) \geq 0
\end{aligned}$$

と変換することが出来る．このように表現した問題には，自由境界問題と比べて自由境界を直接たどる必要がないという非常に大きな利点がある．この利点を活かし自由境界が解の構成のプロセスに干渉しないので，解を構成した後に自由境界見つけることが可能である．

5 変数変換

変数変換は，拡散方程式が $Black-Scholes$ 方程式と比べてはるかに計算が簡単になるために行う計算のテクニックである．変数変換後の $Black-Scholes$ モデルの一般型，境界条件と初期条件は以下のようになる．

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned}
&u(x,\tau) \sim u_{-\infty}(x,\tau) \qquad (x \to -\infty \text{ の時})\\
&u(x,\tau) \sim u_{\infty}(x,\tau) \qquad (x \to +\infty \text{ の時})\\
&u(x,0) = u_0(x) \qquad (3)
\end{aligned}$$

6 直接的な差分法

$\partial^2 u/\partial x^2$ に関して前進差分と対称中央差分用いてさらに，$O(\Delta\tau)$,$O((\Delta x)^2)$ の項を無視して整理すると差分方程式

$$\begin{aligned}
&u_n^{m+1} = \alpha u_{n+1}^m + (1-2\alpha)u_n^m + \alpha u_{n-1}^m\\
&\alpha = \frac{\delta\tau}{(\delta x)^2} \qquad (4)
\end{aligned}$$

を得る．もしステップ m においてすべての n の値について u_n^m がわかっているならば，u_n^{m+1} が直接的に計算できる．これがこの方法を直接的な差分法とよぶ理由である．また (4) は通常の格子上を動くランダムウォークとみなすことが出来る．u_n^m は，マーカーがステップ m において位置 n にいる確率を意味する．右あるいは左に 1 単位進む確率をそれぞれ α，その位置にとどまる確率を $(1-2\alpha)$ とみなす．x に関する間隔 δx を一定に選ぶとき，x に関するステップを区間 $N^-\delta x \leq x \leq N^+\delta x$ だけに着目する．ここで N^- は絶対値が大きな負の整数，N^+ は大きな正の整数である．オプション満期までの時間を $\frac{1}{2}\sigma^2 T/M$ とする．そしての境界条件を用いて $u_{N^+}^m$ と $u_{N^-}^m$ を

$$\begin{aligned}
&u_{N^+}^m = u_{-\infty}(N^-\delta x, m\delta\tau) \qquad 0 < m \leq M\\
&u_{N^-}^m = u_{\infty}(N^+\delta x, m\delta\tau) \qquad 0 < m \leq M
\end{aligned}$$

と定める．反復操作を始めるために (3) の初期条件を用いて

$$u_n^0 = u_0(n\delta x) \qquad N^- \leq n \leq N^+$$

と定める．

解の安定性の問題

有限差分法の陽解法には解の安定性の問題がある．
安定性の問題が生じるのは，有限精度の計算を用いて差分方程式を解いているからである．このことがの数値解に丸め誤差を引き起こす．安定であるためには以下の条件を満たさなければならない．

$$0 < \frac{\delta\tau}{(\delta\tau)^2} \leq \frac{1}{2}$$

7 間接的な差分法

間接的な差分法は，安定性を確保するために直接的な方法で必要となる制限 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ から生じる限界を克服するために用いる．間接的な方法を用いると，時間のステップをとんでもなく小さくすることなく，x に関するメッシュを細かくすることが出来る．後退差分と対称中央差分を用いて，さらに $O(\Delta\tau)$,$O((\Delta x)^2)$ の項を無視して整理すると間接的な差分方程式

$$-\alpha u_{n-1}^{m+1} + (1+2\alpha)u_n^{m+1} - \alpha u_{n+1}^{m+1} = u_n^m \qquad (5)$$

を得る．以前と同様に，空間の間隔と時間のステップはパラメーター α を通して関係している．間接的な差分方程式においては，u_n^{m+1} と u_{n-1}^{m+1}，u_{n+1}^{m+1} が全て u_n^m に間接的に依存している．新しい値は相互に関連していて，古い値だけから直接計算することができない．

8 LU 分解

方程式 (5) は行列とベクトルを用いて

$$Mu^{m+1} = b^m \qquad (6)$$

とあらわす事が出来る．ただし，$u^{m+1} = (u_{N^-+1}^{m+1}, \cdots, u_{N^+-1}^{m+1})$ であり $b^m = u^m + \alpha(u_{N^-}^{m+1}, 0 \cdots 0, u_{N^+}^{m+1})$ である．このとき M は三重対角行列となる．LU 分解では M を下三角行列 L と上三角行列 U の積，$M = LU$ となる分解を求める．そうすれば (6) は単純な二つの方程式

$$Lq^m = b^m \qquad Uu^{m+1} = q^m$$

に分解される．この式は簡単に解くことが出来る．

9 SOR 法

SOR アルゴリズムは反復法の一種で $Gauss-Seidel$ 法を精密化したものである．まず自明な

$$u_n^{m+1,k+1} = u_n^{m+1,k} + (u_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1,k})$$

から始めよう．反復列 $u_n^{m+1,k}$ は $k \to \infty$ のとき u_n^{m+1} に収束することが期待されるので，$(u_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1,k})$ を $u_n^{m+1,k}$ に加えた右辺を u_n^{m+1} の厳密な値に近づくための修正項と考える．ここで過剰に修正を加えると反復列がより速く収束する可能性がう浮かびあがる．実際，k が増加するとき $u_n^{m+1,k} \to u_n^{m+1}$ の収束が振動するのではなく，単調であればそのとおりになる．$Gauss-Seidel$ 法と SOR 法の両方でも，そうなっている．すなわち

$$\begin{aligned} y_n^{m+1,k+1} &= \frac{1}{1+2\alpha}(b_n^m + \alpha(u_{n-1}^{m+1,k+1} + u_{n+1}^{m+1,k})) \\ u_n^{m+1,k+1} &= u_n^{m+1,k} + \omega(y_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1,k}) \end{aligned}$$

とおく．ここで $\omega > 1$ は加速パラメータとよばれる．SOR アルゴリズムでは $\alpha > 0$ のとき $0 < \omega < 2$ を仮定すれば，反復列が (6) の厳密解に収束することが証明できる．ω の最適値を計算，評価する方法もあるが，多くの計算を要するので，各時間ステップで SOR の反復ループでの回数を最小化するように ω を変えたほうが速い．

10 アメリカンオプションにおける線形相補問題

アメリカンオプションの価値を評価する問題は，線形相補問題の形式では

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) \geq 0, \quad (u(x,\tau) - g(x,\tau)) \geq 0,$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)(u(x,\tau) - g(x,\tau)) = 0$$

と形式化された．ペイオフ関数 $g(x,\tau)$ は，プットに対して

$$g(x,\tau) = e^{\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} \quad \max\left(e^{\frac{1}{2}(k-1)x} - e^{\frac{1}{2}(k+1)x}, 0\right)$$

となる．ここで $k = \tau/\frac{1}{2}\sigma^2$ である．初期条件と固定した境界条件は以下のように表される．

$$\begin{gathered} u(x,0) = g(x,0), \\ u(x,\tau) \text{ は連続}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,\tau) \text{ と } g(x,\tau) \text{ は連続}, \\ \lim_{x\to\pm\infty} u(x,\tau) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x,\tau) \end{gathered}$$

11 射影 SOR 法

有限差分近似を制約つきの行列問題として定式化する．u^m を $m\delta\tau$ ステップ時点における近似値のベクトル，g^m を同じステップ時点における制約を表すベクトルとする．

$$u^m = \begin{pmatrix} u_{N^-+1}^m \\ \vdots \\ u_{N^-+1}^m \end{pmatrix}, \quad g^m = \begin{pmatrix} g_{N^-+1}^m \\ \vdots \\ g_{N^+-1}^m \end{pmatrix}$$

と定める.量 Z_n^m を

$$Z_n^m = (1-\alpha)u_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n+1}^m + u_{n-1}^m) \tag{7}$$

とするとき，ベクトル b^m を

$$\begin{pmatrix} b_{N^+-1}^m \\ \vdots \\ b_0^m \\ \vdots \\ b_{N^+-1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{N^+-1}^m \\ \vdots \\ Z_0^m \\ \vdots \\ Z_{N^+-1}^m \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\alpha \begin{pmatrix} g_{N^-}^{m+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g_{N^+}^{m+1} \end{pmatrix} \tag{8}$$

によって定まる．ここで，量 Z_n^m は (7) から定まり，(8) の右辺の第 2 項のベクトルは $n = N^-$と $n = N^+$ における境界条件の効果を含んでいる．次に，再び $(N^+ - N^- - 1)$ 次の三角対角行列で対称な

$$C = \begin{pmatrix} 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha & & \vdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\alpha & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1+\alpha & -\frac{1}{2}\alpha \\ 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2}\alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}$$

を定義しよう．すると，線形相補問題に対する離散的な近似を行列形式の

$$\begin{gathered} Cu^{m+1} \geq b^m, \quad u^{m+1} \geq g^{m+1} \\ (u^{m+1} - g^{m+1}) \cdot (Cu^{m+1} - b^n) = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

と書き直すことができる．すなわち $a_n \geq b_n$ がすべての n に対して成立することを意味する．ベクトル b^m は，$(m+1)\delta\tau$ ステップ時点における v^{m+1} を決定する $m\delta\tau$ ステップ時点の情報を含んでいる．各ステップ時点において，b^m をすでに知られた v^m の値から計算することができる．g^m をすべてのステップ時点 $m\delta\tau$ に対応して計算でき，時間に関するステップについては問題 (9) を解くことだけが必要となる．このことは SOR 法を部分的に修正した射影 SOR 法を用いて計算される．SOR アルゴリズムを考える．これを問題に対する $Crank-Nicolson$ の有限差分の定式化に適用するならば，方程式

$$\begin{aligned} y_n^{m+1,k+1} &= \frac{1}{1+\alpha}(b_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^{m+1,k+1} + u_{n+1}^{m+1,k})) \\ u_n^{m+1,k+1} &= u_n^{m+1,k} + \omega(y_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1,k}) \end{aligned}$$

を得る．この方程式が反復されて $u_n^{m+1,k}$が u_n^{m+1} に収束するならば，$Cu^{m+1} = b^m$ の解となる．制約 $u^{m+1} \geq g^{m+1}$ を満たすように，2 番目の方程式を修正してこの結果を補正する．つまり

$$u_n^{m+1,k+1} = \max(u_n^{m+1,k} + \omega(y_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1}), g_n^{m+1})$$

反復 $u_n^{m+1,k+1}$ が計算されるのと同時に制約が強制的に満たされる．制約の効果が $u_{n+1}^{m+1,k+1}$ と $u_{n+2}^{m+1,k+1}$ などの計算にすぐに現れる．したがって，射影 SOR アルゴリズムでは，方程式

$$y_n^{m+1,k+1} = \frac{1}{1+\alpha}(b_n^m + \frac{1}{2}\alpha(u_{n-1}^{m+1,k+1} + u_{n+1}^{m+1,k+1}))$$
$$u_n^{m+1,k+1} = \max(u_n^{m+1,k} + \omega(y_n^{m+1,k+1} - u_n^{m+1,k}), g_n^{m+1})$$

に対する反復を差 $\|u^{m+1,k+1} - u^{m+1,k}\|$ が無視されるくらい小さくなるまで繰り返す．反復終了時点で，$u^{m+1} = u^{m+1,k+1}$ と定める．アルゴリズムが反復的であるので，どの制約も破らないという意味で解は自己整合的に生成される．この解は $u_n^{m+1} = g_n^{m+1}$ または，$Cu^{m+1} - b^m$ の第 n 成分が消えるという性質をもつ．したがって，アルゴリズムは $u^{m+1} \geq g^{m+1}$ と $(Cu^{m+1} - b^m)(u^{m+1} - b^m) = 0$ が両方とも成立することを保証する．

12　パラメータの設定

今回実行したそれぞれの方法のパラメータを表記する．
$N = 100 \quad M = 100 \quad E = 150$
$S_0 = 150 \quad S_{Max} = 750 \quad S_{Min} = 1/750$
$r = 0.1 \quad \sigma = 0.1 \quad \tau = 1 \; l = 100 \quad \omega = 1.1$

13　実行結果と考察

13.1　乖離率のグラフ

図 1　直接法と LU 分解

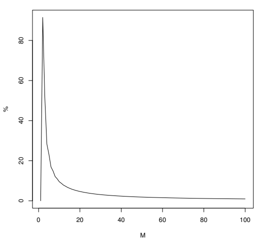
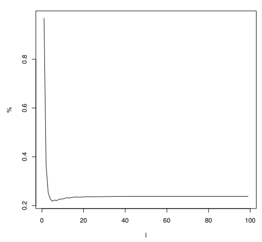
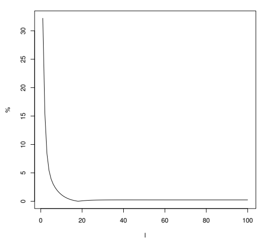


図 2　SOR と射影 SOR　　図 3　GS と射影 SOR





13.2　直接法と LU 分解の比較

直接法と間接法の LU 分解は M を 1〜100 まで取引時点を変えたときのオプション価格を比較した．正確性の面では直接法が正確であった．速度の面でも直接法が速く満期の値に速く近づいた．乖離率をみると M の値を 96 に設定すれば直接法と LU 分解の値はほぼ等しくなる．

13.3　$Gauss-Seidel$ 法，SOR 法，射影 SOR 法の比較

間接法の $Gauss-Seidel$ 法, SOR 法, 射影 SOR 法を反復回数を 1〜100 まで変えたときのオプション価格を比較した．正確性の面では 射影 SOR 法 一番正確であった．速度の面でも 射影 SOR 法 が一番速く満期の値に近づいた．乖離率をみると一度とても低い値に到達した後に少しづつ上りながら収束した．また SOR 法・射影 SOR 法に関しては，ω の値を 1.1〜1.9 まで変化させてみたが変化前と比べ大きな違いは生じなかった．

13.4　全体の比較

直接法と LU 分解は $M = 100$ の値を使用する．$Gauss - Seidel$ 法，SOR 法，射影 SOR 法に対しては $l = 59$ の値を使用する．以下に二項モデルとの誤差を表記する．

表 1　二項モデルとそれぞれの値の誤差

直接法	LU	Gauss-Seidel	SOR	射影 SOR
0.002515	0.115919	0.066650	0.066532	0.016861

表 (1) から正確性は射影 SOR 法が一番良いことがわかる．一番悪いのは，LU 分解である．また計算速度は直接法がアルゴリズムが明快であるため最も速かった．次いで LU 分解がアルゴリズムが複雑ではあるが速かった．$Gauss-Seidel$ 法, SOR 法，射影 SOR 法 は反復法であるために，直接法・LU 分解と比べてはるかに遅かった．以上の結果から今回のパラメータ設定では直接法が最も実用的である事が確認できた．

14　おわりに

今回扱った各方法には特徴があり，状況に応じて選択する必要があることがわかった．本研究が今後この分野を研究しようとする人の参考になれば幸いである．

15　謝辞

本論文の作成にあたり，指導教員として御指導頂きました國田寛教授をはじめ，有益な助言を頂きました院生の方々に心から感謝致します．

16　参考文献

参考文献

[1] Paul Wilmott Sam Howison jeff Dewynne 著
伊藤 幹夫 戸瀬 信之 訳
デリバティブの数学入門共立出版 (2002)