金利デリバティブによる価格決定

2002MM022 堀場 慎吾　　2002MM087 末守 良平

指導教員　國田 寛

1　はじめに

オプションデリバティブでは, 株式を原資産にするものについては解説書も多く, よく用いられているが, 金利が関係するデリバティブについてはあまり知られていないので, 卒業研究では金利モデルを中心にデリバティブの価格決定を色々な側面から調べていくことを目的とする.

2　Black-Scholes モデル

2.1　伊藤の公式

伊藤の公式は, 確定的な変数にとっての Taylor の定理に相当するものであり, 確率変数の微小な変化に対応し, 確率変数の微小な変化に対応し, その確率変数の関数がどのような微少変化をするのかを明らかにする.
資産に関する収益率の変化を $\frac{dS}{S}$ とし, ボラティリティを σ, 資産の平均成長率を μ とすると

$$\frac{dS}{S} = \sigma dX + \mu dt \tag{1}$$

となる. 式 (1) を 2 乗すると

$$\begin{aligned} dS^2 &= (\sigma S dX + \mu S dt)^2 \\ &= \sigma^2 S^2 dt \end{aligned} \tag{2}$$

式 (2) を式 (1) に代入すると

$$\begin{aligned} df &= \frac{df}{dS}(\sigma S dX + \mu S dt) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} dt \\ &= \sigma S \frac{df}{dS} dX + \left(\mu S \frac{df}{dS} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{d^2 f}{dS^2} \right) dt \end{aligned}$$

を得る. これが伊藤の公式であり, 確率変数が微小変化したとき, その確率変数がいかにに変化するかを示す式になっている.

2.2　Black-Scholes モデルにおける収益

市場で取り引き可能な危険証券の株価 $S(t)$ が確率微分方程式

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dX \qquad t \geq 0 \tag{3}$$

に従っているとする. また $S(t)$ を求めるために積分すると

$$\int \frac{1}{S(t)} dS(t) = \int \mu dt + \int \sigma dX$$

となる. 左辺の積分が $\log S(t)$ になるとすれば

$$S(t) = S(0) e^{\mu t + \sigma X}$$

が成立する. しかし, 正しい式 (3) の解は

$$S(t) = S(0) e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma X}$$

である.

3　債券価格決定方定式

3.1　債券価格決定方程式の導出

資産価格に対するモデルに対数正規ランダムウォークを選んだように利子率 r が

$$dr = w(r,t)dX + u(r,t)dt \tag{4}$$

という確率微分方程式に従って変動すると考え,$w(r,t)$ と $u(r,t)$ の関数形がスポット・レート r の挙動と考えるとき, このランダムウォークを用いて, オプション価格の Black-Scholes 方程式を導出したのと同じように, 債券価格の偏微分方程式を導く.

異なる満期日 T_1, T_2 をもつ二つの債券でポートフォリオを構成する. 満期日 T_1,T_2 の債券価格を V_1,V_2 とすると, 前者を 1 単位, 後者を－ Δ 単位からなるポートフォリオを考え, このときのポートフォリオ価値は

$$\Pi = V_1 - \Delta V_2 \tag{5}$$

となる. このポートフォリオ価値の微小期間における変化は,r と t の関数とみて伊藤の公式を適用して

$$dV_1 = \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2}(dr)^2 + K(t)dt \tag{6}$$

$$dV_2 = \frac{\partial V_2}{\partial t} dt + \frac{\partial V_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2}(dr)^2 + K(t)dt \tag{7}$$

以上のことから

$$\begin{aligned} d\Pi &= \frac{\partial V_1}{\partial t} dt + \frac{\partial V_1}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} dt + K(t)dt \\ &-\Delta \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} dt + \frac{\partial V_2}{\partial r} dr + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} dt + K(t)dt \right) \end{aligned} \tag{8}$$

と計算される. また式 (5) から $\Delta = \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}}$ とおくと,dΠ におけるランダム要素を除去できる. このとき

$$\begin{aligned} d\Pi &= \left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} + K(t) \right. \\ &\qquad \left. - \frac{\frac{\partial V_1}{\partial r}}{\frac{\partial V_2}{\partial r}} \left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} \right) \right) dt \\ &= r \Pi dt \end{aligned}$$

となる.V_1,V_2 に関する項をそれぞれまとめると

$$\frac{\left(\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial r^2} - r V_1 + K(t)\right)}{\frac{\partial V_1}{\partial r}} = \frac{\left(\frac{\partial V_2}{\partial t} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial r^2} - r V_2 + K(t)\right)}{\frac{\partial V_2}{\partial r}}$$

を得る. またこの式が成立するのは, 両辺がともに満期日に依存しないときに限るので,V の添字をとると

$$\frac{(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}-rV+K(t))}{\frac{\partial V}{\partial r}}=a(r,t)$$

となるので, ある適当な関数 $a(r,t)$ に対して成立する, 後の展開を考慮すると

$$a(r,t)=w(r,t)\lambda(r,t)-u(r,t)$$

とおく. また終端条件は満期におけるペイオフに対応しており

$$V(r,T)=Z$$

とかかれる. 境界条件は $u(r,t)$ と $w(r,t)$ の形状に依存するため, 特定化したモデルを扱うところで示す. また, クーポンを考慮するのは容易であり, K をクーポンとし r と t に依存するとすれば, 解くべき偏微分方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(u-\lambda w)\frac{\partial V}{\partial r}-rV+K=0 \quad (9)$$

となる.

3.2 リスクの市場価格

ヘッジされたポートフォリオではなく, 満期日 T の債券 1 単位を保有と考え, 微小期間 dt での, 債券の価値変化は

$$dV=w\frac{\partial V}{\partial r}dX+\left(\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+u\frac{\partial V}{\partial r}\right)dt (10)$$

となる. 式 (9) を式 (10) に代入すると

$$dV=w\frac{\partial V}{\partial r}dX+\left(w\lambda\frac{\partial V}{\partial r}+rV\right)dt$$

また次のような形になる.

$$dV-rVdt=w\frac{\partial V}{\partial r}(dX-\lambda dt) \quad (11)$$

となる. 式 (11) に dX があらわれたので, 無リスクではない事がわかる. またこれは無リスクなポートフォリオの収益率を超過する収益であるといえる. 追加のリスク dX あたり λdt だけの追加利益をこのポートフォリオはもたらしているといえ, そのため関数 λ はしばしばリスクの市場価格とよばれる.

3.3 債券価格決定方程式

債券価格決定方程式において w と u が

$$w(r,t)=\sqrt{\alpha(t)r-\beta(t)} \quad (12)$$

$$u(r,t)=-\gamma(t)r+\eta(t)+\lambda(r,t)\sqrt{\alpha(t)r-\beta(t)} \quad (13)$$

という形をとると考える.

また, 関数 α,β,γ,η,λ は時間の関数とし, 式 (12), 式 (13) を式 (9) に代入すると

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}(\alpha(t)r-\beta(t))\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$
$$+(-\gamma(t)r+\eta(t))\frac{\partial V}{\partial r}-rV+K=0.$$

この方程式の解は

$$V(r,t)=Ze^{A(t;T)-rB(t;T)} \quad (14)$$

と表される. このことを以下に示す. 式 (14) を債券価格方程式 (9) に代入すると

$$\frac{\partial A}{\partial t}-r\frac{\partial B}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2B^2-(u-\lambda w)B-r=0 \quad (15)$$

となる.A と B は t と T の関数であり,u と w は t と r の関数である. 式 (15) を r について二回微分し,B で割ると

$$\frac{1}{2}B\frac{\partial^2(w^2)}{\partial r^2}-\frac{\partial^2(u-\lambda w)}{\partial r^2}=0$$

となる.B は T の関数であるから

$$\frac{\partial^2(w^2)}{\partial r^2}=0 \ , \ \frac{\partial^2(u-\lambda w)}{\partial r^2}=0$$

の 2 つの式が同時に成立しなくてはならない.

また式 (12) と式 (13) を式 (15) に代入し,r の各べキに関する係数比較をすると A と B に関する方程式

$$\frac{\partial A}{\partial t}=\eta(t)B+\frac{1}{2}\beta(t)B^2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}=\frac{1}{2}\alpha(t)B^2+\gamma(t)B-1 \quad (17)$$

が得られる. 終端条件 $V(r;T)=Z$ から

$$A(t;T)=0, B(t;T)=0$$

を得る. また,$\alpha=0$ の時, 後に述べる Vasicek モデルに,$\beta=0$ の時, Cox,Ingersoll&Ross モデルにそれぞれ対応している事などを次章からの金利利子率モデルにおいて説明する.

4 金利利子率モデル

4.1 スポット・レート (短期金利利子率)

スポット・レートとは長期的な平均の水準があり, 平均の回りを平均に回帰するように動いている. 瞬間的な利率が確定的な債券と不確定な債券が存在する.

4.2 利子率確定と利子率確定的

利子率が確定していれば, 満期まで待てば額面金額が戻り, 確定した利回りを確保できる. 利子率 $r(t)$, クーポン支払い $K(t)$ のとき, 満期に Z が支払われる債券 t での価格を $V(t)$ とすれば

$$V(t)=e^{-\int_t^T r(\tau)d\tau}\left(Z+\int_t^T K(\acute{t})e^{\int_{\acute{t}}^T r(\tau)d\tau}d\acute{t}\right) (18)$$

を得る. ただし積分の任意定数は V(T) = Z を保障するように定める. 正のクーポン支払いがあると, 時点 t の債券価格が上昇するので注意する.

利子率が不確定であると, 満期時の利回りが確保されず, パラメータの値により様々なスポット・レートモデルから導出する必要がある.

5 利子率が確率的なモデル

5.1 スポット・レートモデル

スポット・レート $r(t)$ は確率測度 P に関しての確率微分方程式は式 (19) に従う.

$$dr(t) = u(r(t),t)dt + w(r(t),t)dZ(t) \quad , \quad t \geq 0 \quad (19)$$

5.2 平均回帰モデル

ドリフト $u(r,t)$ がスポット・レート $r(t)$ の 1 次 (線形) 式で表されるモデル

$$u(r(t),t) = \alpha + \beta r(t), \quad \alpha > 0, \ \ \beta < 0 \quad (20)$$

に従う. また, 代表的な平均回帰モデルである,$r(t)$ が確率微分方程式

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma r(t)^{\gamma} dZ(t) \ \ , \ \ t \geq 0 \quad (21)$$

に従うモデルを考える.

5.3 Vasicek モデル

$\beta \neq 0$,$\gamma = 0$ なので式 (21) から

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma dZ(t) \ \ , \ r \geq 0 \quad (22)$$

式 (22) は線形確率微分方程式であり, 方程式の解は OU(Ornstein-Uhlenbeck) 過程に従うので, 式 (22) の解は

$$r(t) = -\frac{\alpha}{\beta} + \left(r(0) + \frac{\alpha}{\beta}\right) e^{\beta t} + \sigma \int_0^t e^{\beta(t-s)} dZ(s) \quad (23)$$

として解がもとめられる.

5.4 Cox,Ingersoll & Ross (CIR) モデル

このモデルはスポット・レートにおける平方根過程 $\gamma = \frac{1}{2}$ の状況下でのモデルとなる. よって式 (21) から

$$dr(t) = (\alpha + \beta r(t))dt + \sigma \sqrt{r(t)} dZ(t) \quad (24)$$

となる. また利点はスポット・レート $r(t)$ は負の値をとらず,$r(t)$ の従う分布がしられていることである.

5.5 幾何ブラウン運動

式 (21) において $\gamma = 1$,$\alpha = 0$ とおけば幾何ブラウン運動モデル (Black-scholes モデル) となり

$$dr(t) = \beta r(t)dt + \sigma r(t)dZ(t) \quad , \quad t \geq 0 \quad (25)$$

が得られる. 式 (25) の確率微分方程式の解は

$$r(t) = r(0)e^{\nu t + \sigma Z(t)} \quad , \quad \nu = \beta - \frac{\sigma^2}{2} \quad (26)$$

となる. またこの導出が Black-scholes モデルの収益率の導出と同じであることから, Black-scholes モデルと言われている.

6 利子率が不確定な場合の導出

6.1 パラメータが一定の場合

パラメータが一定の場合, 勝手な α,β,γ,η に対する解は, 式 (16) と式 (17) の微分方程式を積分することによって求められる. その場合

$$\frac{2}{\alpha}A = a\psi_2 \log(a-B)$$
$$+(\psi_2 - \frac{1}{2}\beta)b\log((B+b)/b) + \frac{1}{2}B\beta - \alpha\psi_2 \log a$$
$$B(t;T) = \frac{2(e^{\psi_1(T-t)}-1)}{(\gamma+\psi_1)(e^{\psi_1(T-t)}-1)+2\psi_1}$$

となる. ただし a,b,ψ_1,ψ_2 は以下のようになる.

$$b,a = \frac{\pm\gamma + \sqrt{\gamma^2+2\alpha}}{\alpha}, \ \ \psi_1 = \sqrt{\gamma^2+2\alpha}, \ \ \psi_2 = \frac{\eta+\alpha\beta/2}{a+b}$$

6.2 パラメータのあてはめ

本論での確率過程は四つのパラメータ α,β,γ,η をもつ. もしこれらのパラメータが定数とみなせるならば,A と B の明示的な形がもとまり, 債券価格の計算が容易にできる.

しかし, 市場が予想する将来の利子率は, 時間の経過にともなって変化すると考えるのが理にかなっている. そうした時間と将来利子率は, 経済が循環的に変動することから生じているかもしれない. 時間依存するパラメータを導入するとき, 市場からどのような情報を得られるかを慎重に考える必要がある.

7 債券オプション

7.1 債券オプション

債券の価格を $V_B(r,t;T_B)$ と書くことにすると,V_B は偏微分方程式

$$\frac{\partial V_B}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V_B}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial V_B}{\partial r} - rV_B = 0 \quad (27)$$

を満たす. ただし終端条件は $V_B(r,T_B,T_B)$ とし, あとは適当な境界条件を考える. 債券コールオプションの価格は $C_B(r,T)$ とする.$C_B(r,T)$ は式 (27) をみたす. また, 債券価格決定方程式との唯一の違いは, 終端条件が

$$C_B(r,T) = \max(V_B(r,t;T_B) - E, 0) \quad (28)$$

となることである.

7.2 スワップ

金利スワップは二者の間である期間, ある額の元本に対する利子支払いを交換する契約をいう. 支払いを単純な債券に対するクーポンとみなせば, 偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + (u - \lambda w)\frac{\partial V}{\partial r} - rV + (r - r^*) = 0$$

と, その終端条件 $V(r,T) = 0$ を得る.

7.3 キャップとフロア

キャップは, ある規定の値 (キャップとよばれる)r^* を超えないという条件のついた変動金利での貸付である. これは偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(u-\lambda w)\frac{\partial V}{\partial r}-rV+\min(r,r^*)=0$$

を満たす. このとき終端条件は $V(r,T)=1$ となる.

フロアは変動金利が r^* を下回らないという条件に換えられるだけでキャップと同じである.

7.4 スワップション, キャップション, フロアション

スワップ, キャップ, フロアの価値がわかれば, それに対するオプションの価値を決定することができる. スワップを時点 $T<T_S$ において額 E で購入するオプション (コールオプション) の価値 $V(r,t)$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}+(u-\lambda w)\frac{\partial V}{\partial r}-rV=0$$

を満たす. またその終端条件は以下のようになる.

$$V(r,T)=\max(V_S(r,T)-E,0)$$

そこで，まずスワップ自体の価値を求め，次にスワップ価値から終端条件を作り，スワップションの価値を計算する．キャップションとフロアションも同様に計算が可能である.

7.5 債券オプションの数値計算例

今回 Vasicek モデルに関するプログラムを組み, 様々な値を変動させ, 債券ヨーロピアンコールの動きを検証した.

まず, ボラティリティ(σ) を (0.01〜0.50) で変動時のヨーロピアンコールのオプション価格の変動をみた.

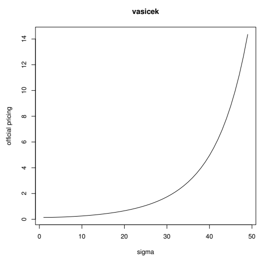

図 1　ボラティリティσ 変動時のヨーロピアンコール

考察：一般的なヨーロピアンコールオプションと同じように σ の値が上昇するとヨーロピアンコールのオプション価格が上昇して,σ が 0.4 付近で急上昇しているので,σ が 0.4 以下のときの方がこのオプションを行買う方がよいと考えられる.

さらに σ の値が 0.2 までのプライシングが現実的な値なので, それ以上の時は買わない方がよいと考えられる.

次に利子率 (r) を (0.04〜0.06),(0.01〜0.99) で変動時のヨーロピアンコールのオプション価格の変動をみた.

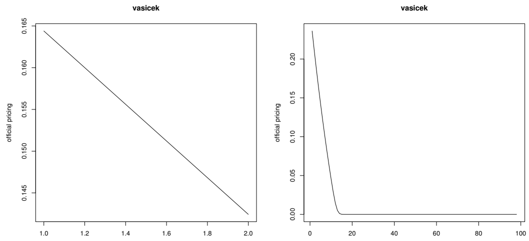

図 2　利子率 r 変動時のヨーロピアンコール

考察：r が約 0.168(16.8%) 以上となると, ヨーロピアンコールのオプション価格は限りなく 0 に近づくので, この条件のもとでは r が 0.168 以上のときは買っても意味がないと考えられる.

次に,(左)：満期 (s) を (0.01〜5.00) を変動時,(右)：行使する時期 (T) を (0.01〜1.00) の変動時のヨーロピアンコールのオプション価格の変動をみた.

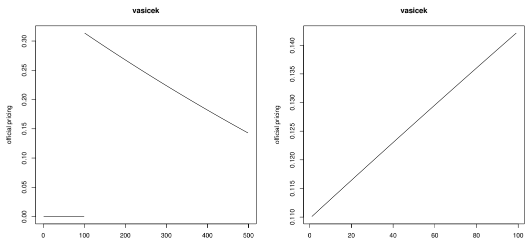

図 3　(左) 満期 s 変動時のヨーロピアンコール,(右) 行使時期 T 変動時のヨーロピアンコール

考察：(左) 行使する時期 ($T=1$) となっているので,$s>T$ のときにしかオプション計算は成立しないので,$s<T$ の部分は 0 となると考えられる．s が増加すると, ヨーロピアンコールのオプション価格は減少するので, 行使する時期 T を考える必要がある.

(右)T が増加するとヨーロピアンコールのオプション価格も増加し, 満期 s まで増加させると 0 となるので, 行使する時期を考慮すべきであると考えられる.

8 おわりに

今回学んだ有名なモデルはもちろんの事, その他のモデルに関しても知識を深め, その使いわけも理解し, 金利デリバティブの価格づけを一般化し, 資産運用に役立てたい.

9 謝辞

本論文やそれを立証するためのプログラミングを完成するにあたり, 御指導いただいた方には心から感謝します.

参考文献

[1] Wilmott,P.,S. Howison,J. Dewyme: デリバティブの数学入門, 共立出版,(2002).

[2] 木島正明: 期間構造モデルと金利デリバティブ, 朝倉書店,(1999).

[3] 木島正明，長山いづみ，近江義行: ファイナンス工学入門 第 3 部 数値計算法, 日科技連出版社,(1996).