多期間確率計画モデル
– シナリオ・ツリー型モデル –

2002MM002 青井 良太
指導教員　國田 寛

1　はじめに

昨年起こったライブドアによる日本放送株の大量取得に続き，今年は村上ファンドの阪神電鉄株買収や，東証のシステムダウンなど，良くも悪くも株に関する話題は絶えない．また株の売買は大企業や一部の企業家だけのことではなく，個人投資家として自分の財産の運用をすることも今ではめずらしくなくなった．今や株は日常にあふれている．そしてそれら全ての投資家が目指すものは，少ないリスクで大きなリターンを得ることである．

リスクを軽減するためには様々なジャンルの資産でポートフォリオを作ることが必要になってくる．しかし，資産の種類は豊富で，むやみにたくさんの資産からポートフォリオを組めばいいということでもない．また，Brinsonらの研究では，「ポートフォリオ全体の収益率の変動の90%は，資産配分によって説明される」とされている．そこで，多期間にわたる資産配分問題，つまり多期間確率計画モデルの理論を学び，それを現実の世界でどのように利用できるかを考えたいと思う．

2　シナリオ・ツリー型確率計画モデル

多期間モデルとは，例えば，現時点，1時点後，2時点後,… というように,「現在」と「複数の将来時点」までの複数期間をモデルの中で明示的に考慮したモデルである．一般的に，このタイプの問題を直接的に取り扱って解くのは難しく，実務的に利用するためには，2種類のタイプの近似モデル(シナリオ・ツリー型モデルとシミュレーション型モデル)が提案されている．

本研究では，このうちのシナリオ･ツリー型モデルに焦点をあてて研究していく．

3　モデルの定式化

ポートフォリオ最適化問題では投資比率を決めるモデル化がされているが，一般にシナリオ・ツリー型モデルでは投資額もしくは投資量を決めるモデル化がなされている．その理由は，投資比率を用いるモデルは非凸非線形制約式を含まなくてはならないのに対し，シナリオ・ツリーで投資額もしくは投資量を用いるモデルは投資比率を用いるモデルと等価なモデルを線形制約式のみで記述可能だからである．今回は実際の問題でよく利用されている投資量決定モデルを定式化する．

4　モデルの記述 投資量決定モデル

0時点での配分決定

0時点での危険資産jの相対価格ρ_{j0}と投資基準価額z_{j0}の積(危険資産jへの投資額)と，現金の投資額v_0の合計はW_0である．

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{1}$$

0時点の配分決定による1時点の富($s \in S_1$)

1時点での状態sでの富は危険資産jの1時点の相対価格ρ^s_{j1}と0時点の投資基準価額z_{j0}の積と，現金v_0の$(1 + r_0)$倍の合計である．

$$W^s_1 = \sum_{j=1}^{n} \rho^s_{j1} z_{j0} + (1+r_0)v_0 \tag{2}$$

$t-1$時点の配分決定($z^{s'}_{j,t-1}$,$v^{s'}_{t-1}$)によるt 時点の状態sの富

同様に，t時点の状態sでの富は$t-1$時点での配分決定をもとにして(4)式で表すことができる．

($t-1$時点の配分決定)

$$\sum_{j=1}^{n} \rho^{s'}_{j,t-1} z^{s'}_{j,t-1} + v^{s'}_{t-1} = W^{s'}_{t-1} \qquad (s' \in S_{t-1}) \tag{3}$$

$$W^s_t = \sum_{j=1}^{n} \rho^s_{jt} z^{s'}_{j,t-1} + (1+r^{s'}_{t-1})v^{s'}_{t-1} \qquad (s \in S_t) \tag{4}$$

特に，$t = T$のときは，計画最終時点(T時点)におけるシナリオsの富を表し，(5)式で表すことができる．

$$W^s_T = \sum_{j=1}^{n} \rho^s_{jT} z^{s'}_{jT-1} + (1+r^{s'}_{T-1})v^{s'}_{T-1} \qquad (s \in S_T) \tag{5}$$

目的関数とそれに関連する制約式

計画最終時点での富(最終富(W_T))の期待値をある一定以上にするという制約のもとで，最終富の目標富(W_G)に対する不足分(1次の下方部分積率)を最小化する．

$$\begin{array}{llcll}
\text{Minimize} & \displaystyle\sum_{s \in S_T} p^s q^s & & & (6)\\
\text{subject to} & W^s_T + q^s & \geq & W_G \quad (s \in S_T) & (7)\\
 & q^s & \geq & 0 \quad (s \in S_T) & (8)\\
 & \displaystyle\sum_{s \in S_T} p^s W^s_T & \geq & W_E & (9)
\end{array}$$

・相対価格とは，単位あたりの価格を単位あたりの基準価額で割ったもの，投資基準価額とは，基準価額で記述した投資量で，投資量(単位数)に単位あたりの基準価額を掛けたものである．
・添字のsは状態を表す添字で，s'は任意の時点の状態sにつながっている1時点前の状態を表す添字である．

5　数値実験

投資量決定モデルによる数値実験をEXCELで行う．実際は，理想的なモデルと現実的なモデルの2通りの数値実験を行ったが，今回は現実的なモデルのみをしめす．

5.1　組み入れ比率と売買回転率の追加

各資産の組み入れ比率の上限制約および危険資産の売買回転率の上限制約を設定する．そのために，以下の定式化をモデルに追加する．組み入れ比率の上限値をU_j^I，売買回転率の上限値をU_j^Tとする．この数値実験では，すべての資産の組み入れ比率の上限制約を$U_j^I = 0.6(j = 0,1,2,3)$に，すべての危険資産の売買回転率の上限制約を$U_j^T = 0.2(j = 1,2,3)$と設定する．

5.2　設定条件

下のような条件のもとで数値実験を行う．・3期間
・シナリオ：8シナリオ(2×2×2)
・対象資産：現金，株式(情報・通信業，電気・ガス業，サービス業)
・資産価格は簡単のため相対価格を用いることにし，株式の初期時点での価格を1とする．また，現金コールは0.008とする．
・初期(時点の)富(W_0)は，1億円とする．
・計画期末(3時点後)の目標富(W_G)は，1億円とする．
・各資産の組み入れ比率の上限を0.6とする．
・各危険資産の売買回転率の上限を1±0.2とする．

5.3　実際のモデル

実際の株の株価の動きを調べ(2005年10月～12月)，数値実験に使う価格表を作る．ここで用いるデータは，東京証券取引所ホームページの株価指数ヒストリカルグラフをもとにしている．10月から12月までの株価の動きを調べ，1ヵ月を1期間として考えている．1期間の株価の平均を出し，その期間の値が平均値より低い場合と高い場合にわける．例えば11月の値は，10月の株価の平均より高い場合の平均と，低い場合の平均とに分かれている．また簡単のため相対価格を用いた．今回はスペースのため、相対価格の表は省略している．

6　数値実験　考察

現実の株価等を利用して行った数値計算では，最近の株価の上昇を受けて，不足分の期待値が0になってしまった．(最終富の期待値は10259.6万円)下の表は，各資産への各時点での投資基準価額を表したものである．

現金	10月	11月	12月
	1365.61	1656.82	1609.79
			0.00
		1101.23	1758.68
			2901.81
情報・通信業	10月	11月	12月
	0.00	0.00	0.00
			0.00
		0.00	0.00
			0.00
電気・ガス業	10月	11月	12月
	5015.64	4012.51	3210.01
			4815.01
		6018.76	4815.01
			4815.01
サービス業	10月	11月	12月
	3618.76	4342.51	5211.01
			5211.01
		2895.00	3474.01
			2316.00

7　終わりに

今回の研究では，実際の株価の動きを調べ，それをもとに数値計算を行うことが出来たので，ある程度現実的な計算が出来たと思う．今度はさらに，売買コスト等を考慮したモデルを作り，さらに現実に即したモデルを作りたい．また，使用したデータはあくまで過去のデータであり，本来は将来のことを予想して数値を出さなければならない．これからはそういったことも勉強をしていき，いつか自分が投資を考えるときに役立てられるようにしたい．

謝辞

本研究を進めるにあたり，2年間熱心にご指導くださり，また多大な助言をいただいた南山大学数理情報学部数理科学科の國田寛教授，またご協力いただいた諸先輩方に深く感謝致します．

参考文献

[1] 佐々木規雄：金融工学最適化, 朝倉書店 (2001).

[2] 東京証券取引所：株価指数ヒストリカルグラフ,
http://quote.tse.or.jp/tse/quote.cgi?Fhistidx/