有限差分法によるオプションプライシング

2001MM104 安井 直樹
指導教員　國田 寛

1　はじめに

現在，多種多様の証券またはオプションが日々取り引きされている．それらが取り引きされる場合に当然ついて回るものがその価値，価格の決定である．そのために，いかに正確に，いかに素早くその価値を算出できるか，というために数多くの計算方法が生み出されている．その中で今回，研究対象として有限差分法を選んだ．研究目的として，有限差分法がどんなものであるかを理解し，有限差分法を用いる際に，求めた解が有効であるための安定条件を数値，または式として表現することを目的としている．
上記の問題について，いくつかの文献を参考にしながら研究していく．通常，ヨーロピアンオプションを評価する際，ブラックショールズモデルが多く用いられる．ブラックショールズモデルとは．株式や通貨を原資産とする派生証券が従う偏微分方程式にコール，またはプットの満期におけるペイオフを初期条件として，解析的に導出したものである．

2　偏微分方程式

配当の無い証券の上に書かれたペイオフ関数h(x)を持つ満期Ｔの派生証券の時点ｔにおける価格をf(t,S(t))とする．S(t)は時点tでの証券価値である．

2変数関数f(t,S)は，偏微分方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t}+rs\frac{\partial f}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}-rf=0 \tag{1}$$

および終端条件f(T,S)=h(S)をみたす関数である．またここでのｒは利子率(安全証券の瞬間的な収益率)，σはボラティリティである．この式を今回，有限差分法で近似していく．

2.1　数値解法

偏微分方程式を有限差分法で解くということは，全てのグリッド(格子点)の価値を求めることと同値である．

長方形の縦軸においた証券価格は原理的には[0,∞)であるが，先程述べたようにここでは有限空間[Smin,Smax]であると考え，そしてそれを等分割する．($\Delta S=\frac{S\max-S\min}{N}, S_j=S\min+j\Delta S$) 次に時間軸について，これも証券価格と同様に有限の範囲[t,T]で区切りを考える．そしてその範囲をM等分割する．($\Delta t=\frac{T-t}{M}, t_i=t+i\Delta t$)こう定めることにより(1)の偏微分方程式の解を離散近似によって求める際の解の状態空間が

$$(t_i,S_j);i\in 0,1,2\cdots M,j\in 1,2\cdots N$$

このように定義される．これにより空間は(M+1)×(N+1)個のグリッドからなる空間である．

またこれらをもちいることにより，差分表式が以下のように定まる．

$$\begin{aligned}
\text{前進差分}\frac{\partial F}{\partial S} &\cong \frac{F_{i+1,j}-F_{i,j}}{\Delta S}\\
\text{後退差分}\frac{\partial F}{\partial S} &\cong \frac{F_{i,j}-F_{i-1,j}}{\Delta S}\\
\text{中心差分}\frac{\partial F}{\partial S} &\cong \frac{F_{i+1,j}-F_{i-1,j}}{\Delta 2S}\\
\text{中心差分}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2} &\cong \frac{F_{i+1,j}-2F_{i,j}-F_{i-1,j}}{(\Delta S)^2}
\end{aligned}$$

2.1.1　陽解法と陰解法

陽解法では各グリッドにおける偏微分方程式の差分近似の方法として$\frac{\partial f}{\partial S}$と$\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}$については中心差分を，$\frac{\partial f}{\partial t}$については後退差分をもちいる．また，陰解法では前進差分を用いる．

3　安定性と収束性

3.1　差分スキーム

有限差分法とは，偏微分方程式に差分表式を用いることで差分方程式に変換し，その方程式を解くことで解を求める，という解法である．差分法とは，差分間隔を限りなく小さく(理想は無限小)していき，それによって計算の精度をあげていいくことを目的とした数値解法である．そこで仮に，$((\Delta S)_1,(\Delta t)_1)$,$((\Delta S)_2,(\Delta t)_2)\cdots$(0,0)という具合に差分間隔をどんどん小さくしていき，随時差分方程式を解いていったとする．するとそれらの結果から収束して行く方向がわかれば数値的にはその偏微分方程式の解が判明した，ということと同義となる．しかしそのときのＳ，Ｔの分割度合を互いに独立に選び続けたとしたら，試行の数が膨大な量になることはあきらかだ．そこで，ΔSとΔtに$\Delta S=h(\Delta t)$のようにΔS をΔtの関数にしてしまえば，tのみの関数と考えることもできるため，徒に分割していた場合よりは計算時間の短縮にもつながり，また収束方向の考察も容易となる．こういった一連の流れを差分スキームと呼ぶ．

3.2　ラックスの同等定理

差分法を用いる場合に，その解が差分間隔を0の極限まで近づけた場合に偏微分方程式の解に収束していかなければ意味が無い．そういったことを調べるための定理がラックスの同等定理である．
まずここで，偏微分方程式を

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}$$

$$u_n^m = (S_n, t_m)$$

とおく．$(S_n,t_m)=(n\Delta S, m\Delta t)$である．このときの陽解法での差分方程式は

$$u^{m+1} = u^m + \frac{\Delta t}{(\Delta S)^2}\delta^2 u^m \tag{2}$$

となる．ただしここでのδ^2は任意の$f(S)$に対して

$$\delta^2 f(S) = f(S+\Delta S) - 2f(S) + f(S-\Delta S)$$

となる2階の中心差分演算子とする．

ここで，$K = K(\Delta S, \Delta t) = 1 + \frac{\Delta t}{(\Delta S)}\delta^2$とおくと(2)は

$$u^{m+1} = Ku^m \tag{3}$$

と置き換えることができる．このときのKを差分演算子と呼ぶ．そしてこのKのm乗のノルム$|K^m|$に対して，

$$|K^m| \leqq C \qquad \left(\begin{array}{c} 0 \leqq m\Delta t \leqq T\text{を満たす} \\ \text{どのような}m, \Delta t\text{においても} \end{array}\right)$$

となるような正の定数Cが存在する場合，偏微分方程式に適合する差分スキームの解は$\Delta t \to 0$の極限で解析解に収束する．これが陽解法におけるラックスの同等定理である．

3.3　差分スキームの具体的表現

差分方程式を解いて導いた解が意味のあるものであるためには，差分スキームとして安定のものを使う必要があることをここまでで述べた．しかし，先程述べたラックスの同等定理はこのままの形だと実用的でない．従って具体的な形に変形する必要がある．用いる差分方程式を(3)とする．まずこれを陽の方程式と仮定し行っていく．その場合，右辺は隣接するいくつかの格子点上のu_j^nの値の1次結合であるから，差分演算子Kは

$$K = \sum_k c_k \mathcal{T}^k$$

という形に書き換えることができる．ここで$\mathcal{T}$は，任意の関数$f(x)$に作用させたとき

$$(\mathcal{T}f)(x) = f(x+\Delta x)$$

とするような，平行移動を表す演算子である．また，kは整数，c_kは$\Delta x, \Delta t$を含む定数である．

この差分方程式(3)は波数ξの正弦波を表す次の形の特解を持っていることに注意しておく．

$$\begin{aligned} u_j^n &= g^n \exp(i\xi j\Delta x) \\ &= g^n(\cos\xi j\Delta x + i\sin(\xi j\Delta x) \qquad i=\sqrt{-1} \end{aligned} \tag{4}$$

ここでのgは一般的に$\Delta x, \Delta t$を含む数である．g^nは普通の意味でのgのn乗を表す．gを適当に選べば(4)が(3)の解になることを示すために，これを(3)に代入してみる．平行移動の演算を指数関数に施すと，

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\exp(i\xi j\Delta x) &= \mathcal{T}\exp(i\xi(x+\Delta x) \qquad (x=j\Delta x) \\ &= \exp(i\xi\Delta x)\exp(i\xi j\Delta x) \end{aligned}$$

となるから，これをn回繰り返せば

$$\mathcal{T}^m \exp(i\xi\Delta x) = \exp(i\xi m\Delta x)\exp(i\xi j\Delta x)$$

である．したがって，(4)を(3)を代入した結果は

$$g^{n+1}\exp(i\xi j\Delta x) = \sum_k c_k g^n \exp(i\xi k\Delta x) exp(i\xi j\Delta x)$$

となる．両辺を$g^n\exp(i\xi j\Delta x)$で割れば

$$g = \sum_k c_k \exp(i\xi k\Delta x) \tag{5}$$

を得る．結局，gを(5)のように選んでおけば，(4)が(3)の解となることがわかった．この数gは，演算子Kによって時間を1ステップ(Δt)だけ進めたときに，正弦波を表す解(5)がどれだけ拡大(もしくは縮小)されるかを表す値で，Kの増幅率と呼ぶ．ここで，任意の関数は波数の異なる正弦波の重ね合わせとして表すことができるから，差分間隔の間に

$$\Delta x = h(\Delta t)$$

という関係を設定した差分スキームが安定であるための条件は

$$|g|^n \leqq C \qquad \left(\begin{array}{c} \text{どのような}\xi\text{，および}0 \leqq n\Delta t \leqq T \\ \text{を満たすどのような}n\text{と}\Delta t\text{に対しても} \end{array}\right)$$

この式を満たす定数Cが存在することである．

と言い換えることができる．これは同じ付帯条件のもとで

$$|g| \leqq 1 + L\Delta t \qquad (\Longleftrightarrow |g(\Delta t)| \leqq 1 + L\Delta t\ ) \tag{6}$$

この不等式を満たす定数Lが存在することと同じである．gはもともとΔxとΔtの関数であるから不等式(6)から$\Delta x = h(\Delta t)$の許される関数形が決まる．つまり(6)が満たされないような関数関係をΔxとΔtの間に設定したのでは，$\Delta t \to 0$の極限で差分方程式の解が一般には満たされない．この不等式を「フォン・ノイマンの条件」という．この不等式はラックスの同等定理を差分スキームの安定性を保証する重要かつ便利な条件式である．

4　終わりに

この研究を行って，安定条件の必要性を知り，そして有限差分法の理解がすすんだ．しかし数値計算の点において研究が思うように進まず，理論値に近付くことなくおわってしまったため，今後の課題として残った．

5　謝辞

今回研究を行うにあたり多大な助言と指導をいただいた國田寛教授をはじめとしたたくさんの先輩方に深く感謝します．

参考文献

[1] 高見穎郎,河村哲也;　偏微分方程式の差分解法，東京大学出版社(1994)

[2] 森平爽一郎，小島裕：コンピュテーショナルファイナンス，朝倉書店(1997).