エキゾチック・オプションにおける価値評価

2001MM009 橋元 和絵　　2001MM020 井上 佳奈

指導教員　國田 寛

1　はじめに

資産の取引場所である金融市場の数学モデルのオプションや先物, スワップといったデリバティブの市場に焦点をあてる. 本研究においては, デリバティブの 1 つであるオプションのバリアー・オプションとアジアン・オプションについて研究する. バリアー・オプションは橋元, アジアン・オプションは主に井上が担当する.

2　バリアー・オプション

バリアー・オプションは経路依存型で, オプション期間内もしくはオプションの行使において, 原資産の価格がバリアーに到達した場合に権利が発生もしくは消滅するオプション取引である。バリアーを上回る場合と下回る場合との組み合わせで, アップ・アンド・イン, ダウン・アンド・イン, アップ・アンド・アウト, ダウン・アンド・アウト, の 4 つに区別される.

2.1　ヨーロピアン・オプションに対する Black-Scholes 方程式

ヨーロピアン・コールのオプション価格 $C(S,t)$ に関する Black-Scholes 方程式は次のように書ける. ペイオフは $max(S-E,0)$ のオプションである. S を原資産,t を時間で表す.

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0$$

ヨーロピアンに対する Black-Scholes 公式は r と σ が一定のとき, ヨーロピアン・コールの厳密解を示す.

$$C(S,t)=SN(d_1)-Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

となる.

ヨーロピアン・プットの価格 $P(S,t)$ の厳密解は, ペイオフが $max(E-S,0)$ であるとき以下のように与えられる.

$$P(S,t)=Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)-SN(-d_1)$$

2.2　ノック・アウト (ダウン・アンド・アウト)

資産価格 S がバリアー X よりも大きい場合, オプション価値 $V(S,t)$ は,

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0 \tag{1}$$

を満たす. ペイオフが $max(S-E,0)$ となるヨーロピアン型のダウン・アンド・アウト・コール・オプションのため, ヨーロピアン・コールの場合同様,
終端条件は,

$$V(S,T)=max(S-E,0)$$

となり, 境界条件は,

$$V(S,t)\sim S,(S\to\infty)$$

S が X に達したならば, オプションは無価値になる. よって (S,t) 空間での $S=X$ という直線上で,

$$V(X,t)=0$$

次に, バリアー・オプションの明示的な価格公式を求める為, 変数変換を用いる.

$$S=Ee^x,t=T-\frac{\tau}{\frac{1}{2}\sigma^2},V=Ee^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau)$$

とする. ただし,$\alpha=-\frac{1}{2}(k-1)$,$\beta=-\frac{1}{4}(k+1)^2$, $k=\frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2}$ である. これにバリアー変換 $x_0=\log\frac{X}{E}$ をつけ加える. これにより, バリアー・オプションの問題は,

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2}$$

境界条件は,

$$u(x,0)=max\left(e^{\frac{1}{2}(k+1)x}-e^{\frac{1}{2}(k-1)x},0\right)=u_0(x),x\geq x_0$$

$$u(x,t)\sim e^{(1-\alpha)x-\beta\tau},\qquad (x\to\infty)$$

$$u(x_0,t)=0$$

となる. 行使価格, 満期時点が同一であるバリアーなしのバニラ・オプションの価値が,

$$C(S,t)=Ee^{\alpha x+\beta\tau}u_1$$

と仮定すると,(2) の解によって

$$u_1(x,\tau)=e^{-\alpha x-\beta\tau}\frac{C(S,t)}{E}$$

である. 次にバリアー・オプションの価格を,

$$V(S,t)=Ee^{\alpha x+\beta\tau}(u_1(x,\tau)+u_2(x,\tau))$$

とおくと,

$$\begin{aligned}u_2(x,\tau)&=-u_1(2x_0-s,\tau)\\&=-e^{-\alpha\left(2\log\left(\frac{X}{E}\right)-\log\left(\frac{S}{E}\right)\right)-\beta\tau}\frac{C\left(\frac{X^2}{S},t\right)}{E}\end{aligned}$$

となり,S を $\frac{X^2}{S}$ で置き換え,

$$V(S,t) = C(S,t) - \left(\frac{S}{X}\right)^{-(k-1)} C\left(\frac{X^2}{S}, t\right)$$

が得られる.

2.3 ノック・イン (ダウン・アンド・イン)

S が上昇するにつれて, それが下降してバリアーに触れてオプションが有効となる可能性はどんどん小さくなるため, オプションは $S \to \infty$ となるとき無価値になる.
よって、境界条件の一つは,

$$V(S,t) \sim 0, (S \to \infty)$$

終端条件は $S > X$ に対して,

$$V(S,T) = 0$$

となる。資産価格が満期以前に $S = X$ に到達した場合オプションはバニラ・コールになり、価格づけが適用されるので、2 番目の境界条件は、

$$V(X,t) = C(X,t)$$

となる. ダウン・アンド・イン・オプションを明示的に解くために,

$$V(S,t) = C(S,t) - \bar{V}(S,t)$$

として, 終端条件は

$$\bar{V}(S,T) = max(S - E, 0)$$

となり, 境界条件は,

$$\bar{V}(S,t) = C(S,t) - V(S,t) \sim S - 0 = S, (S \to \infty)$$

$$\bar{V}(X,t) = C(X,t) - V(X,t) = C(X,t) - C(X,t) = 0$$

これは, ダウン・アンド・アウトとなる. よってバニラ・オプションからダウン・アンド・アウトを引くとダウン・アンド・インになることがわかる.

3 バリアー・オプションのプログラム実行結果

3.1 ダウン・アンド・アウト・コールオプション

プログラム実行計算値
$N = 23$, $M = 100$,$SMAX = 200.0$,$SMIX = 0.0$,
$T = 1.0$,$S = 100.0$,$K = 100.0$,$r = 0.1$,$\sigma = 0.3$

3.2 アップ・アンド・アウト・プットオプション

プログラム実行計算値はダウン・アンド・アウト・コールオプションと同じとする.

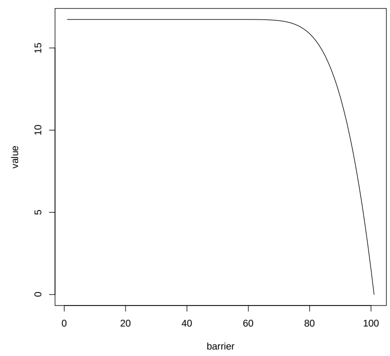

図 1: ダウン・アンド・アウト・コールオプション

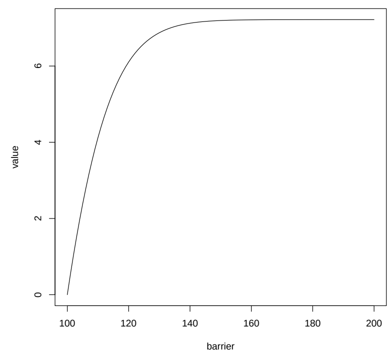

図 2: アップ・アンド・アウト・プットオプション

4 バリアー・オプションの考察

4.1 ダウン・アンド・アウト・コールオプションの考察

バリアー H=0 から H=100 に変化させることにより解の変化を考察した結果, バリアーが行使価格に近くなるにつれて, 解が 0 に近くなり価値が無くなることがわかった. また, バリアー以外の条件が等しいヨーロピアン・オプション価格は 16.734134 であり, バリアー・オプションと比べると価格が安くなる.

4.2 アップ・アンド・アウト・プットオプションの考察

バリアー H=100 から H=200 の値まで変化させることにより解の変化を考察した結果, バリアーが行使価格より越えるまでは, 価値が無い. また, バリアーの値が高くなるにつれて価値が高くなる. さらに, バリアー以外の条件が等しいヨーロピアン・オプションの価格は 7.217876 であり, バリアー・オプションと比べると価格が安くなる.

5 アジアン・オプション

典型的なアジアン・オプションは, 事前に決めたある期間中の資産の平均価格に依存して資産を買う権利を保有者に与える契約である.

アジアン・オプションのペイオフはランダム・ウォークする資産価格の平均に依存するために, 経路依存型に分類され, アベレージ・ストライク・コールを考えると, 満期時点の原資産価格の平均の差がプラスの場合その差をペイオフとし, それ意外の場合ペイオフはゼロとするオプションである. 原資産価格そのものでなく, 資産価格の平均のように時間経路に関連する量に依存するオプションを分析する場合, 現在時点の資産価格に達する資産価格経路の実現値は多数ありうるのに, もともとの Black-Scholes の方法はそれらの経路の違いを区別しないため, うまくいかない.

時間経路に依存する量を扱うというやりかたは, アジアン・オプションやルックバック・オプションに適用できる.

5.1 アベレージ・ストライク・オプション

このオプションの満期時点のペイオフはコールの場合

$$\max\left(S-\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau, 0\right)$$

I は満期時点での資産価格平均である. 変数変換,

$$R=\frac{1}{S}\int_0^t S(\tau)d\tau$$

より, 事前行使のペイオフと満期時のペイオフは,

$$S\max\left(1-\frac{R}{t}, 0\right), \qquad S\max\left(1-\frac{R}{T}, 0\right)$$

となる. 満期時のペイオフはプットの場合

$$\max\left(\frac{1}{T}\int_0^T S(\tau)d\tau - S, 0\right)$$

コールと同様に変数変換を導入し, 事前行使のペイオフと満期時のペイオフは,

$$S\max\left(\frac{R}{t}-1, 0\right), \qquad S\max\left(\frac{R}{T}-1, 0\right)$$

と書かれる. ここで,

$$V=(S,R,t)=SH(R,t)$$

と置くと, ヨーロピアンの場合は,

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+(1-rR)\frac{\partial H}{\partial R}=0$$

を得る.C と P をヨーロピアン・アベレージ・ストライク・オプションのコールとプットの価値とすると, プット・コール・パリティは,

$$C-P=S-\frac{S}{rT}\left(1-e^{-r(T-t)}\right)-\frac{1}{T}e^{-r(T-t)}\int_0^t S(\tau)d\tau$$

となる.

アベレージ・ストライク・オプションの偏微分方程式,

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+(1-rR)\frac{\partial H}{\partial R}=0$$

より, 境界条件は,$R\to\infty$ の場合,S が有限な t について有界であるため,R は S がゼロに向かう場合しか無限にはならないため,

$$H(\infty,t)=0$$

となる.$R=0$ の場合は,

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial R}=0$$

と現される. 終端条件は,

$$max\left(\frac{R}{T}-1, 0\right)$$

である.

5.2 オプション価格の数値解法

陽解法では偏微分方程式を差分近似する場合, 時間に関する差分近似を後退差分を使い, 原資産の 1 階差分については中心差分を用いて以下の関係式を利用する.
偏微分方程式

$$\frac{\partial H}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2R^2\frac{\partial^2 H}{\partial R^2}+(1-rR)\frac{\partial H}{\partial R}=0$$

の差分近似をすることから,

$$H_{i,j-1}=a_iH_{i+1,j}+b_iH_{i,j}+c_iH_{i-1,j}$$
$$(i=1,2,\cdots,M-1)$$

ただし,

$$a_i=\frac{1}{2}\sigma^2i^2\Delta t+\frac{1}{2}(\alpha-ri\Delta t)$$

$$b_i=1-\sigma^2i^2\Delta t$$

$$c_i=\frac{1}{2}\sigma^2i^2\Delta t-\frac{1}{2}(\alpha-ri\Delta t)$$

このような関係式が得られる.

6 アジアン・オプションの実行結果

計算値は, 原資産のグリッドの分割数 $N = 50$, 時間のグリッドの分割数 $M = 300$, 原資産の初期価格 $S_0 = 100$, ボラティリティ $\sigma = 0.3$, 満期 $T = 1.0$, 利子率 $r = 0.05$, 比率 (資産価格平均/原資産) $R = 1.0$, プットの場合は比率 $R = 1.5$ とする. このときの安定条件は $M \geq 225$ である. この条件でのオプション価値は表 1 である.

さらに, 横軸に R を変動させ, 縦軸にオプション価格をとった場合のグラフを表す. 図 3 はコールの場合, 図 4 はプットの場合を示す.

表 1: オプション価値

ヨーロピアン・コール	14.231245
アベレージ・ストライク (コール)	9.302310
ヨーロピアン・プット	9.354187
アベレージ・ストライク (プット)	6.068375

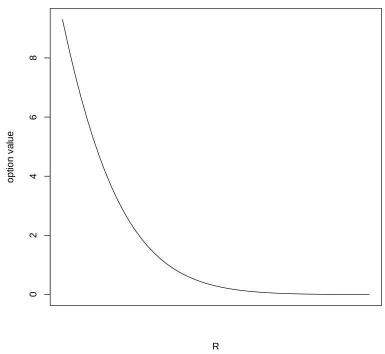

図 3: R=0.5〜2.0 のとき (コール)

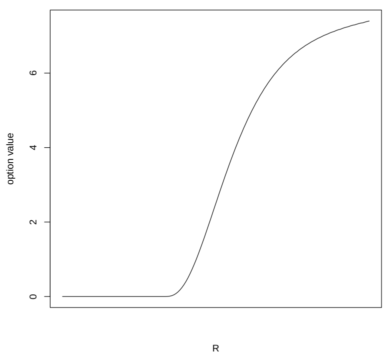

図 4: R=0.5〜2.0 のとき (プット)

7 考察

コールの場合は, ヨーロピアン・オプションと比べると価格が安くなる. σ の値を 0.1〜0.5 に変化させると価格は高くなっていく. また, T の値を 0.5〜0.2 に変化させると価格は高くなるが, ヨーロピアン・オプションよりも安いままである.$T = 0.1$ のときは高くなる. プットの場合は, コールの場合と同様に, ヨーロピアン・オプションと比べると価格が安くなる. σ の値を 0.1〜0.5 に変化させると価格は σ が小さくなるほど高くなっていくが, ヨーロピアン・オプションよりも安い価格である. また,T の値を 0.5〜0.1 に変化させると価格は T が小さくなるほど高くなり, ヨーロピアン・オプションよりも高くなる. また,T の値を大きい場合を除いて R の値は 1.0 以上でないと値は得られない.

8 おわりに

本研究ではバリアー・オプション, アジアン・オプションに重点を置き研究してきた. ダウン・アンド・アウト・コールオプション, アップ・アンド・アウト・プット・オプション, アベレージ・ストライク・オプション (コール, プット) についてプログラムを作成し, 考察をした. 陽解法ではアルゴリズムが比較的簡単で計算速度が早いという利点があるが安定条件により資産の分割数を大きくすると時間の分割数が階乗で大きくなることがわかる. そのため, 分割数を大きくしすぎると計算が追い付かず解が得られなくなってしまう. 今後は状況, 条件にあった方法を選択しオプション価値を算出する必要がある.

謝辞

本研究を進めるにあたり, 御指導頂いた國田寛教授, 大学院生の方々に心から感謝致します.

参考文献

[1] 伊藤幹夫、戸瀬信之著 デリバティブの数学入門 共立出版株式会社

[2] 木島正明、長山いづみ著 ファイナンス工学入門 日科技連

[3] 森平爽一朗、小島裕著 コンピュテーショナルファイナンス 朝倉書店