Anti-windup 制御系の設計

2002MM062 村上 徳時

指導教員　陳 幹

1　はじめに

実システムでは，制御対象の保護や物理的限界のため，アクチュエータの出力振幅や変化率に制限があり，十分な制御性能を発揮させるには，これらの制限を考慮した制御系設計が必要である．実際，これらを考慮せずに設計したコントローラを用いると，コントローラ出力の異常増大や閉ループ系の不安定化など，Windup 現象と呼ばれる深刻な制御性能の劣化が生じる場合がある．

本論文では Windup 現象を抑制する方法の一つとして，制御入力に対する制限をあらかじめ考慮し，その制限を越えないような線形補償器を設計する．この手法は現在，線形行列不等式 (LMI) を用いて，状態フィードバックによるサーボ系において参照入力にステップ入力を用いたときに，制御入力が制限値を越えないようなフィードバックゲインの計算法が明らかにされている [1]．しかし，状態フィードバックを実際のシステムに応用しようとするとき，状態変数が必ずしも検出できないため，オブザーバとの併用が必要になるなど，制御系構成が大変複雑となる場合が多い．そのことからも明らかなように，もし，検出可能な出力だけで制御系が実現できれば，実用上きわめて有用となることは間違いない．そこで本論文では，出力フィードバックによるサーボ系において参照入力にステップ入力を用いたときに，制御入力が制限値を越えないような補償器の設計法を提案する．

2　問題設定

本論文では，制御系の枠組として出力フィードバックによるサーボ系を用いる．ここで本来考えたい問題はステップ応答に対する問題であるが，初期値を適切に設定することで，初期値問題として扱うことができる．また本論文では，簡単のため 1 入出力系を考え，制御対象 $P(s)$ として状態表現

$$P(s):\left\{\begin{array}{l}\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\\ y(t)=Cx(t)\end{array}\right. \tag{1}$$

で表されたものを扱う．ここで，$x(t)\in R^n$ は状態変数，$u(t)\in R$ は制御入力，$y(t)\in R$ は制御出力として，A，B，C は適当な大きさの定数行列とする．簡単のため，各状態の初期値は全て 0 とする．また，制御入力 $u(t)$ に対し，拘束条件

$$|u(t)|\le l \tag{2}$$

が存在しているとする．ここで，l は制御入力 $u(t)$ の制限値であり，制御対象における必要最小入力より大きい既知の正の定数とする．この制御系に対し，ステップ参照入力 $r(t)=r(t\ge 0)$ を加える．そして，$r(t)$ に追従するサーボ系を構成する．また，追従誤差 $e(t)$ を，

$$e(t)=r(t)-y(t) \tag{3}$$

とし，出力フィードバックコントローラ $K(s)$ は，

$$K(s):\left\{\begin{array}{l}\dot{x_c}(t)=A_cx_c(t)+B_ce(t)\\ u(t)=C_cx_c(t)+D_ce(t)\end{array}\right. \tag{4}$$

で表されるものとすると，制御系は図 1 のブロック線図で構成される．

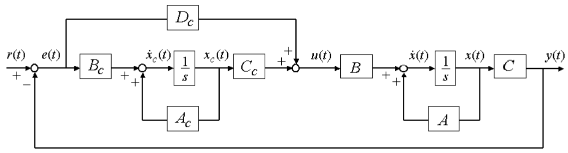

図 1　出力フィードバックによるサーボ系

3　制御入力が制限値を越えないコントローラの設計

制御入力が制限値を越えないコントローラを設計ための条件は

$$\left\{\begin{array}{l}\hat{A}\hat{X}+\hat{X}\hat{A}^T<0\\ \left[\begin{array}{cc}\hat{X} & \hat{X}\hat{K}^T\\ \hat{K}\hat{X} & l^2\end{array}\right]\ge 0,\ \left[\begin{array}{cc}1 & \hat{\tilde{x}}_0^T\\ \hat{\tilde{x}}_0 & \hat{X}\end{array}\right]\ge 0\end{array}\right. \tag{5}$$

$$\hat{A}=\left[\begin{array}{cc}A-BD_cC & BC_c\\ -B_cC & A_c\end{array}\right],\hat{\tilde{x}}(t)=\left[\begin{array}{c}\tilde{x}(t)\\ \tilde{x_c}(t)\end{array}\right]$$

$$\hat{K}=\left[\begin{array}{cc}-D_cC & C_c\end{array}\right]$$

と表すことができる [2]．ここで $\hat{\tilde{x}}(t)$ は拡大偏差系の状態である．なお本論文では制御対象 $P(s)$ とコントローラ $K(s)$ の次数が等しいと仮定しているので，コントローラの状態変数を適当に選ぶことにより，一般性を失うことなく $\hat{X}$ の形を

$$\hat{X}=\left[\begin{array}{cc}X & Z\\ Z & Z\end{array}\right]>0 \tag{6}$$

に限定することができる [3]．ここで $\hat{\tilde{x}}(t)$ の初期値 $\hat{\tilde{x}}_0$ は，制御対象に対する偏差系の初期値 $\tilde{x}_0$ とコントローラに対する偏差系の初期値 $\tilde{x}_{c0}$ からなるものである．なお $\tilde{x}_0$ は，$\tilde{x}_0$ と r の関係式

$$\left[\begin{array}{c}\tilde{x}_0\\ \tilde{u}_0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{cc}A & B\\ C & 0\end{array}\right]^{-1}\left[\begin{array}{c}0\\ -r\end{array}\right] \tag{7}$$

より表されるものとする．$\tilde{x}_{c0}$ については，コントローラは定常状態では動作していないことが望ましいので，$\tilde{x}_{c\infty}=0$ すなわち $\tilde{x}_{c0}=0$ と設定する．この制約条件 (5)

を満たす $(\hat{A},\hat{X},\hat{K})$ が存在すれば，拘束条件 (2) を満たす出力フィードバックコントローラを設計することができる．しかし，制約条件 (5) は非線形となっており，このままでは解くことが困難である．そこで制約条件 (5) に合同変換，変数変換を行い線形化する [3]．合同変換，変数変換を行い，最適化条件を付加すると制約条件 (5) は，γ を最小化する凸最適化問題

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} -\delta & -\Phi^T & XC^T \\ -\Phi & -\epsilon & C^T \\ CX & C & \gamma \end{bmatrix} > 0 \\ -\begin{bmatrix} -X & -I & XC^TD_c^T - G^T \\ -I & -Y & C^TD_c^T \\ D_cCX - G & D_cC & -l^2 \end{bmatrix} \geq 0 \\ \begin{bmatrix} 1 & \tilde{x}_0^TY \\ Y\tilde{x}_0 & Y \end{bmatrix} \geq 0 \end{cases} \tag{8}$$

$$\delta = (A - BD_cC)X + X(A - BD_cC)^T + BG + G^TB^T$$
$$\epsilon = Y(A - BD_cC) + (A - BD_cC)^TY + LC + C^TL^T$$
$$Y = (X - Z)^{-1}$$

に帰着することができる．ここで，

$$\begin{aligned} \Phi &= Y\{(A - BD_cC)X + BC_cZ + B_cCX - A_cZ\} \\ &\quad +(A - BD_cC)^T \\ L &= YB_c,\ G = C_cZ \end{aligned} \tag{9}$$

は A_c，B_c および C_c を置き換える新しい行列変数である．なお D_c は任意の定数として扱う．適切な D_c の設計方法として，(2) 式に (4) 式を代入した

$$|u(t)| = |C_cx_c(t) + D_ce(t)| \leq l \tag{10}$$

について考える．$t = 0$ のとき，$x_c(0) = 0$，$e(0) = -r$ となり，上式は

$$|D_c| \leq \frac{l}{r} \tag{11}$$

となる．よって上式の条件下で D_c を設計し，γ を最小化しつつ，LMI 条件 (8) を解き，$Z = X - Y^{-1}$ を計算し，(9) 式を A_c，B_c および C_c について解けば，拘束条件 (2) を満たすコントローラを求めることができる．

4 シミュレーション

制御対象として状態空間表現

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -4.00 & -0.03 & 0 \\ 0.075 & -1.00 & 0 \\ 0 & 1.00 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned} \tag{12}$$

を扱う．なお制御対象の初期値は全て 0 とする．また，目標値を $r = 1.0$，制御入力 $u(t)$ に対する拘束条件を $|u(t)| \leq 10$ とする．$D_c = 0$ として，LMI を解き，シミュレーションを行った．その制御入出力波形を図 2 に示す．図 2 の制御入出力波形より，拘束条件を満たしていることが確認できる．しかし，制御対象へ利用可能な最大入力を与えることができていないため，目標値への追従が遅くなっている．目標値追従を速くするためには，制御対象へ利用可能な最大入力を与える必要がある．そこで，

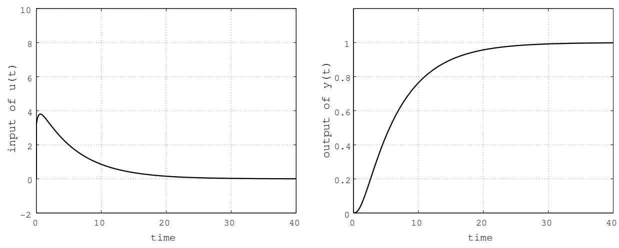

図 2　$D_c = 0$ のときの制御入力波形 (左)，制御出力波形 (右)

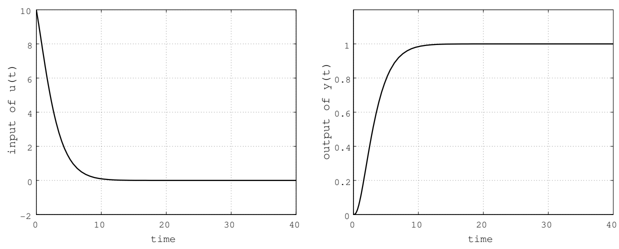

図 3　$D_c = 10$ のときの制御入力波形 (左)，制御出力波形 (右)

$$D_c = \frac{l}{r} = 10 \tag{13}$$

として，LMI を解いた．このときのシミュレーション結果を図 3 に示す．図 3 の制御入出力波形より，拘束条件を満たしつつ，目標値へ追従していることがわかる．また，図 2 に比べ，制御入力 $u(t)$ の値も大きくなったことにより，目標値への追従も早くなったことがわかる．このことから，目標値 r，拘束条件 ($|u(t)| \leq l$) のとき，$D_c = \frac{l}{r}$ とし，LMI 条件 (8) のもと γ を最小化することによって，最適な出力フィードバックコントローラを求めることができる．

5 おわりに

本論文では，出力フィードバックによるサーボ系において参照入力にステップ入力を用いたときに，制御入力が制限値を越えることなく，評価関数を最小にする最適な出力フィードバックコントローラを求めるための条件を示し，その条件に変数変換を行うことにより，LMI 可解問題に帰着できることを示した．しかし，本論文では簡単のため，制御対象の各状態の初期値を 0 とした．しかし，各状態の偏差系に対する式を立てれば初期値を考慮することができると考えられる．

参考文献

[1] 大萱：入力飽和を考慮したロバストサーボ系の設計, 大阪府立大学工学部情報工学科卒業研究報告書 (1997).

[2] S.Boyd, L.E.Ghaoui, E.feron and V.Balakrishnan: Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory, SIAM(1994).

[3] 岩崎: LMI と制御, 昭晃堂 (1997).