関数のチェビシェフ級数展開による数値積分法
– コーシーの主値積分 –

2001MM081 清水 香織
指導教員　鳥居 達生

1　はじめに

本研究では, まずチェビシェフ多項式の性質について学び, これをもとに関数のチェビシェフ級数展開, その項別積分およびコーシーの主値積分の計算法について述べる. その際に, 滑らかな関数 $f(x)$ をチェビシェフ級数に展開する. $f(cos\theta)$ のコサイン級数の係数を台形公式を用いて近似し, それをクレンショウの算法によって効率的 (計算量の節減) に求める. そこで得られたチェビシェフ級数は簡単に項別積分できる. これを利用して関数の定積分とコーシーの主値積分の計算を行う [1][2].

2　チェビシェフ多項式の性質

チェビシェフ多項式 $T_n(x)$ は

$$T_n(x) = cosn\theta,\ x = cos\theta$$

で定義される n 次の多項式である.
チェビシェフ多項式の性質を以下に記す.

2.1　チェビシェフ多項式 $T_n(x)$

最高べきの係数は 2^{n-1} である.

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots.$$

2.2　$T_n(x)$ の限界

[-1,1] 上で $|T_n(x)| \leq 1$.

2.3　$T_n(x)$ の n 個の零点

$$x_j = cos\frac{\pi}{n}(j + \frac{1}{2})$$
$$T_n(x_j) = 0,\ 0 \leq j < n.$$

2.4　[-1,1] 上で $T_n(x)$ が最大値, 最小値をとる点

$$y_k = cos\frac{\pi}{n}k.$$
$$T_n(y_k) = (-1)^k,\ 0 \leq k \leq n$$

2.5　$T_n(x)$ の最良性

区間 [-1,1] において, 最高べきの係数を 1 とする n 次の多項式 $p(x)$ の中で

$$max|p(x)|$$

を最小にする多項式は $2^{-n+1}T_n(x)$ である。
関数近似のためにチェビシェフ多項式が利用される理由は, ここにある.

2.6　漸化式

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$
$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x).$$
$$k = 1, 2, 3, \cdots$$

2.7　積分

$$\int T_k(x)dx = \begin{cases} T_1(x) & k = 0 \\ T_2(x)/4 & k = 1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{T_{k+1}(x)}{k+1} - \frac{T_{k-1}(x)}{k-1}\right) & k \geq 2 \end{cases}$$

ただし, 積分定数は省略する.

3　関数のチェビシェフ級数展開

チェビシェフ展開係数を台形公式で求める.
滑らかな関数 $f(x), -1 \leq x \leq 1$ において,$x = cos\theta$ と変数変換すれば, $f(cos\theta)$ はフーリエコサイン級数に展開できる.

$$f(cos\theta) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 cos\theta + a_2 cos2\theta + \cdots$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(cos\theta)cosk\theta d\theta \quad ,\ k = 0, 1, 2, \cdots$$

変数を元に戻せば

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0T_0(x) + a_1T_1(x) + a_2T_2(x) + \cdots$$

となる. これが $f(x)$ のチェビシェフ級数展開である.
簡単のため, 初項だけ 1/2 倍して和をとる記号 $\sum'$ を用いる.
チェビシェフ展開係数 a_k の積分区間 $[0, \pi]$ を n 等分して, 台形公式を用いて計算すると,

$$a_k \cong \frac{2}{n}\sum_{j=0}^{n}{}'' f(cos\frac{\pi}{n}j)cos\frac{\pi}{n}kj$$

となる. ただし、$\sum''$ は台形公式の計算の都合より初項と末項を $\frac{1}{2}$ 倍にして和をとることを意味する.

3.1　級数の和を求めるクレンショウの算法

n 次のチェビシェフ級数

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}{}' a_kT_k(x)$$

は、x を与えた時, 以下のクレンショウの算法によって, 簡単に求めることができる.

$b_n = 0, \quad b_{n-1} = a_n$

$b_{k-1} = 2xb_k - b_{k+1} + a_k, \quad k = n-1, n-2, \cdots 1, 0$

$f(x) = \dfrac{b_{-1} - b_1}{2}$

3.2 チェビシェフ級数の項別積分

関数 $f(x)$ のチェビシェフ級数の積分は

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= \int \sum_{k=0}^{n}{}' a_k T_k(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^{n}{}' a_k \int T_k(x)dx \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1} - a_{k+1}}{k} T_k(x)\end{aligned}$$

となる.

数値例

指数関数 $f(x) = e^x$ を例として単精度 (10 進 6 桁) で計算した結果を示す. 区間 [-1,1] 上で e^x を項数 16 と定め, チェビシェフ級数展開した. 実行結果を以下に示す.

展開係数 a_k

a[0]=2.532131	a[8]=0.00000
a[1]=1.130319	a[9]=0.00000
a[2]=0.271495	a[10]=0.000000
a[3]=0.044337	a[11]=0.000000
a[4]=0.005474	a[12]=0.000000
a[5]=0.000543	a[13]=-0.000000
a[6]=0.000045	a[14]=-0.000000
a[7]=0.000003	a[15]=-0.000000

このチェビシェフ級数を項別積分し, 定積分

$$I = \int_0^1 e^x = 1.718282\cdots$$

を求めた. 数値積分の結果は, 単精度演算の下で 10 進 6 桁まで正しく求めることができた.

数値積分の結果=1.718282

4 コーシの主値積分

関数 $f(x)$ に対するコーシーの主値積分を行う.

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x-c}dx, \quad -1 < c < 1$$

$f(x)$ を $2(x-c)$ で割って商を $g(x)$, 余りを r とすれば

$$f(x) = 2(x-c)g(x) + r$$

の g(x) と r はクレンショウの算法で求まる.

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1}{}' w_k T_k(x)$$

とすれば, 被積分関数は

$$\frac{f(x)}{x-c} = 2\sum_{k=0}^{n-1}{}' w_k T_k(x) + \frac{r}{x-c}$$

よって, 区間 [-1,1] でのコーシーの主値積分は

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{x-c} = 2\int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n-1}{}' w_k T_k(x) + f(c)\log|\frac{1-c}{1+c}|$$

となる. 右辺第 1 項の項別積分は 3.2 より簡単である.

数値例

	$\int_{-1}^{1} \frac{9x+2}{3x+1}$	$\int_{-1}^{1} \frac{(8x+3)^2}{4x+3}$
展開係数	a[0]=1.333333	a[0]=20.500000
	a[1]=3.000000	a[1]=12.000000
	a[2]=-0.000000	a[2]=8.000000
	a[3]=-0.00000	a[3]=0.000000
	a[4]=0.000000	a[4]=-0.000000
	a[5]=0.000000	a[5]=-0.000000
	a[6]=0.000000	a[6]=-0.000000
	a[7]=-0.00000	a[7]=0.000000
	a[8]=0.000000	a[8]=-0.000000
	a[9]=0.000000	a[9]=-0.000000
	a[10]=0.000000	a[10]=-0.000000
	a[11]=0.000000	a[11]=-0.000000
	a[12]=-0.00000	a[12]=0.000000
	a[13]=0.000000	a[13]=-0.000000
	a[14]=0.000000	a[14]=-0.000000
	a[15]=0.000000	a[15]=-0.000000
数値解	5.768951	4.378298
真値	5.768951	4.378298

5 おわりに

関数 $f(x)$ のチェビシェフ級数展開と, コーシーの主値積分のプログラムを C 言語で作成した [3][4]. 手計算よりもプログラムを組むことにより, 数学の理論がよく分かった. 中間発表では, チェビシェフ級数の積分までだったが, その後, コーシーの主値積分まで研究を進めた. そこでは, チェビシェフ多項式が, 関数近似として優れているということがよく分かった.

参考文献

[1] 森 正武：計算機による数値解析法, 科学技術出版社 (1980)

[2] 新井 智子：関数のチェビシェフ展開係数とその数値積分法への応用, 2003 年度 卒業論文要旨集, 南山大学 数理情報学部 数理科学科,156-157(2004)

[3] 浦 昭二, 原田 賢一：C 入門, 電子計算機のプログラミング= 11, 培風館 (1994)

[4] 清水 忠昭, 菅田 一博：C 言語のススメ, サイエンス社 (2002)