

磁気浮上システムに対するロバスト制御器設計

2001MM059 小田 由弘

指導教員 高見 勲

1 はじめに

現在世の中には非線形性の強い制御対象が非常に多く存在している。そこで、非線形性の強い制御対象を制御し、シミュレーションだけでなく実験により実感が得られることができる磁気浮上システムを対象に選択した。そして、制御理論によりプラントの制御要素に摂動があったとしても安定に動作することを保証させるためのロバスト制御の代表的手法である H_∞ 制御法を用いて制御器を設計する。

2 モデル

磁気浮上システムを線形化した数学的モデルは次に示す通りである。

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \quad , \quad [x_1, x_2]^T = [z, \dot{z}]^T \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & -2\zeta\sqrt{\frac{k_1}{m}} \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_{u1}}{m} \end{bmatrix} \\ C &= [1 \quad 0] \\ k_1 &= \frac{4u_0}{a(z_0 + b)^5} \quad , \quad k_{u1} = \frac{1}{a(z_0 + b)^4} \end{aligned}$$

ただし、 m は円盤型磁石の質量、 ζ は減衰比、 u_0 は電圧、 y は出力、 z は磁石の高さを表し、 \dot{z} は磁石の速度である。また、実験の結果、パラメータ a, b は $1.5 < a < 2.8$ [counts/Ncm⁴]、 $3.9 < b < 4.9$ [cm] で変動することがわかった。そして、減衰比 ζ も $0.05 < \zeta < 0.23$ 変動する。また、 k_1, k_{u1} は、浮上させる力 F に関する下の関係式を、平衡状態 $[z_0, u_0]^T$ において線形近似して求められる。

$$F = \frac{u}{a(z+b)^4}$$

また、パラメータ a, b, ζ は変動するため a, b, ζ の平均をとり、ノミナルな設計モデル (平衡点 $z = 2$ [cm]) とする。パラメータ変動に対する設計モデルとの誤差を、加法的な変動 $\Delta(s)$ として見積もり、その特異値プロットをとる。そして、加法的な変動の特異値プロットを基に相補感度関数の重み $W_T(s)$ と感度関数の重み $W_s(s)$ を決定する。この際、準相補関数の重みは高周波領域で大きくなるように、感度関数の重みは低周波領域で小さくなるように決定し、トレードオフをはかる [1]。その結果、 $\frac{10(s+1)}{0.01s+200}$ 、感度関数の重みは $\frac{10(0.001s+1)}{s+0.01}$ である。 $W_T(s)$ と $W_s(s)$ を図 1 に示す。右上がりの破線が $W_T(s)$ 、右下がりの破線が $W_s(s)$ を表している。

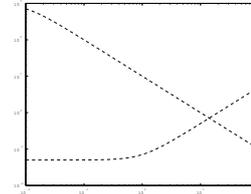


図 1 感度関数の重みと準相補感度関数の重み：横軸は [rad/s]、縦軸は

3 H_∞ 制御と混合感度問題

図 2 において一般化プラントにおいて外部入力 w から出力 z_1, z_2 への影響が小さくなることを要求する。加法的な変動に関して混合感度問題として捉えると下式となる [2]。

$$\left\| \begin{bmatrix} W_s S \\ W_t K S \end{bmatrix} \right\|_\infty < \gamma \quad (1)$$

ここで、 $S = (I + PK)^{-1}$ である。

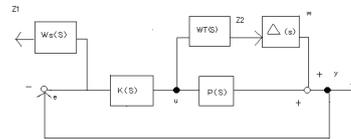


図 2 加法的変動モデル

4 LMI による制御器の設計

LMI (線形行列不等式) 問題としてフリーソフト Scilab を用いてコントローラを導出する。図 2 を状態空間方程式で表すと下式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{x}_T \\ \dot{x}_p \\ \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_s & 0 & -B_s C_p & -B_s & 0 \\ 0 & A_T & 0 & 0 & B_T \\ 0 & 0 & A_p & 0 & B_p \\ C_s & 0 & -D_s C_p & -D_s & 0 \\ 0 & C_T & 0 & 0 & D_T \\ 0 & 0 & -C_p & -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ x_T \\ x_p \\ w \\ u \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} A_{g1} & B_{g1} & B_{g2} \\ C_{g1} & D_{g11} & D_{g12} \\ C_{g2} & D_{g21} & D_{g22} \end{bmatrix}$$

さらに、このプラントの状態空間方程式は $\dot{x} = A_g x + B_{g1} u + B_{g2} w, z = C_{g1} x + D_{g11} w + D_{g12} u, e = C_{g2} x +$

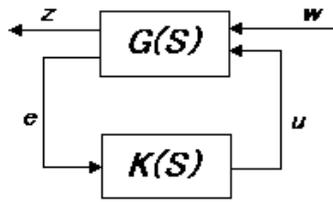


図3 一般化プラント $G(s)$ とコントローラ $K(s)$ の関係を表したブロック線図

$D_{g21}w + D_{22}u$ として表すことができる。コントローラの状態空間方程式を $\dot{x}_k = A_k x_k + B_k u, u = C_k x_k$ として、図の一般化プラントを対象にコントローラを導出する。

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A_k & B_k C_{g2} \\ B_{g2} C_k & A_g \end{bmatrix} B_{cl} = \begin{bmatrix} B_k D_{21} \\ B_{g1} \end{bmatrix}$$

$C_{cl} = [D_{g12} C_k C_{g1}] D_{cl} = 0$ と置いて

$$\begin{bmatrix} A_{cl}^T P_{cl} + P_{cl} A_{cl} & P_{cl} & C_{cl}^T \\ B_{cl}^T P_{cl} & -I & D_{cl}^T \\ C_{cl} & D_{cl} & -I \end{bmatrix} < 0$$

を解く。これは、(1) 式を LMI により定式化したものである。ただし、 A は安定行列、 P_{cl} は正定値対象行列、 I は単位行列を表している。また、 γ を自ら指定することによって (γ は本来小さい値が望ましいが、不等式が可解となるような γ を選ぶ必要があり、 $\gamma = 7.5$ にした) P_{cl} を解き、 A_k, B_k, C_k を見つける問題となる。そして、LMI を解いて、 H_∞ 出力フィードバックコントローラを導出し伝達関数で表すとコントローラ $K(s)$ は下式で与えられる。

$$K(s) = \frac{0.1099s^3 + 2740s^2 + 1.894e004s + 1.681e006}{s^4 + 27.57s^3 + 790.1s^2 + 1.289e004s + 128.8}$$

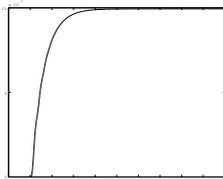


図4 ステップ入力に対する応答：横軸は time[sec]、縦軸は height[m]

5 積分器を含む一般化プラントとシミュレーション、実装

図4の結果より、オフセットが残っているので、オフセットを無くすために積分器をコントローラに導入す

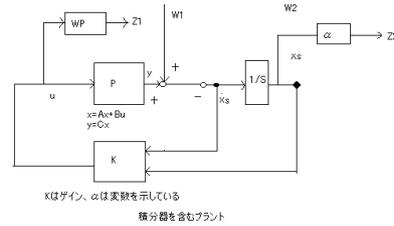


図5 積分器を含むプラント

る。図5のブロック線図は積分器を含む ($1/s$ を含む) 一般化プラントであり、さらに、積分器 ($1/s$) を含んだコントローラと制御対象についての一般化プラントを考える。そして LMI 問題として出力フィードバックコントローラを導出する。コントローラ導出の際に相補感度関数の重み $W_T(s) = k(s + \beta)^2$ とした。また、コントローラ導出の際にパラメータ $k=0.1, \beta=5, \beta=50$ と変えて積分器を含むコントローラを設計した。そして求めたコントローラ $K(s)$ は

$$K(s) = \frac{1296s^3 + 9639s^2 + 799611s + 397696}{s^4 + 121s^3 + 1854s^2 + 896s}$$

そして、このコントローラを組み込んだ際のステップ入力に対する応答は図5より、ほぼシミュレーション、実装共に一致した。

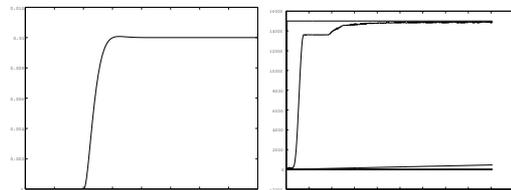


図6 左、ステップ入力に対する応答(シミュレーション)、右、ステップ入力に対する応答(実装)：横軸は time[sec]、縦軸は height[m]

6 評価

磁気浮上システムを一般化したプラントを対象に、 H_∞ 制御に基づいて混合感度問題を解き、コントローラを導出した。さらに、導出したコントローラがシミュレーション、実験において適切なコントローラであると言えた。また、シミュレーションと実験の結果により、理論の妥当性が確認できた。

参考文献

- [1] 細江繁幸・荒木光彦：制御系設計，朝倉書店(1994)
- [2] 森藤篤：ロバスト制御，コロナ社(2001)