

# エネルギー制御とスライディングモード制御による 倒立振子の振り上げと安定化

— 線形と非線形によるアプローチ —

2001MM048 松浦 達郎      2001MM083 鈴木 宏和

指導教員 高見 勲

## 1 はじめに

我々は、非線形な対象である倒立振子 Pendubot を制御するにあたり振り上げを非線形モデルに対するエネルギー制御で、安定化をスライディングモード制御で行い、2つの制御則を切り替えることでトップポジションでの安定化を目指す。理論の有用性を示すために実験を行い、2つの制御則を切り替える際のパラメータ調整や、シミュレーションでは起こらなかった現象について考察し、より良い制御性能を実現するよう改善する。なお、鈴木宏和は振り上げ制御と切り替え制御を、松浦達郎は安定化制御を担当する。

## 2 モデリング

Pendubot のモデルは図1の通りである。これより物理モデルをラグランジュの運動方程式から求めると下式になる [1]。

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1}\boldsymbol{\tau} - \mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{c}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{D}(\mathbf{q})^{-1}\mathbf{g}(\mathbf{q})$$

ここで  $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)$  は制御入力であり、 $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$  はリンクの角度である。Pendubot は4次の微分方程式からなる非線形なシステムで、モータに繋がっていないリンク2の制御入力  $\tau_2$  は0である。

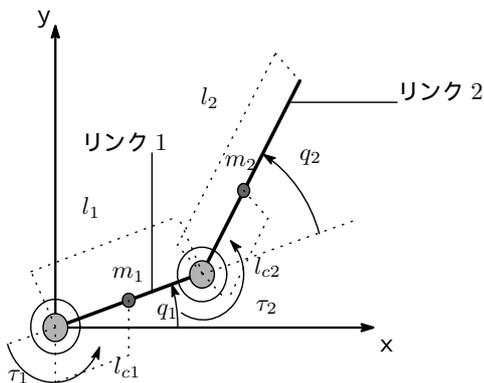


図1 Pendubot モデル

## 3 エネルギー制御による振り上げ

ダウンレスティングポジションを  $(q_1, q_2) = (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 、トップポジションを  $(q_1, q_2) = (\frac{\pi}{2}, 0)$  と定義する。振り上げではダウンレスティングポジションからトップポジ

ションの位置近くまで振り上げることを制御目標とする。非線形の制御対象を制御するのに、平衡点の周りで線形化をして線形制御を行う方法が良く用いられるが、ダウンレスティングポジションとトップポジションとは特性が大きく違うため、トップポジションで線形化して求めた制御則でダウンレスティングポジションからの振り上げ制御をすることはできない。そのため非線形モデルを直接用いて制御を試みることにする。

エネルギーの総和を  $E$  とすると下式を得る。

$$E = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2\theta_1 + \frac{1}{2}(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2\theta_2 + \cos q_2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\theta_3 + \theta_4g \sin q_1 + \theta_5g \sin(q_1 + q_2) \quad (1)$$

振り上げ制御のコントローラを設計するためにリアプノフ関数を用いる。リアプノフ関数の候補を Spong 氏に習い下式で与える [2]。

$$V(q, \dot{q}) = \frac{k_E}{2}\tilde{E}(q, \dot{q})^2 + \frac{k_D}{2}\dot{q}_1^2 + \frac{k_P}{2}\tilde{q}_1^2 \quad (2)$$

ここで、 $k_E, k_D, k_P$  は正の定数であり、 $\tilde{E}$  はエネルギーの現在値と振り上げ目標のエネルギーとの差、 $\tilde{q}_1$  はリンク1の現在の角度と振り上げ目標の角度との差、即ち  $\tilde{E} = E - (\theta_4 + \theta_5)g$ 、 $\tilde{q}_1 = q_1 - \frac{\pi}{2}$  である。このリアプノフ関数は準正定である。 $\dot{V}$  を求めると

$$\dot{V} = \dot{q}_1(k_E\tilde{E}\tau_1 + k_D\dot{q}_1 + k_P\tilde{q}_1) \quad (3)$$

となる。 $-\dot{q}_1 = k_E\tilde{E}\tau_1 + k_D\dot{q}_1 + k_P\tilde{q}_1$  となるように  $\tau_1$  を決めると  $\dot{V} = -\dot{q}_1^2$  となり  $V$  は単調非増加関数となる。この関係式から制御入力  $\tau_1$  を求めると、 $\tau_1$  は

$$\tau_1 = \frac{-k_D\dot{q}_1 - k_P\tilde{q}_1 - (\theta_1\theta_2 - \theta_3^2\cos^2 q_2)(\dot{q}_1 + k_P\tilde{q}_1)}{(\theta_1\theta_2 - \theta_3^2\cos^2 q_2)k_E\tilde{E} + k_D\theta_2} \quad (4)$$

である。特異点を回避するために  $|\tilde{E}|$  を下式で与える。

$$|\tilde{E}| = \min(2\theta_4g, 2\theta_5g, \frac{k_D - \varepsilon}{k_E\theta_1}) \quad (5)$$

### 3.1 振り上げシミュレーション

(4)式で決めた制御入力によって振り上げシミュレーションを行った。図2、3に結果を示す。シミュレーションを行う際、 $k_E, k_D, k_P$  はそれぞれ  $k_E = 0.4, k_D = 1, k_P = 0.957$  として行い、 $\tilde{E}$  は  $\pm 6.5$  で飽和させることで(5)式を満足するようにした。なお、シミュレーションは Matlab/Simulink<sup>\*1</sup>を用いた。

\*1 MATLAB/Simulink は米国 Math Works 社の登録商標です。

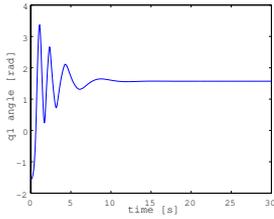


図2 リンク1の角度

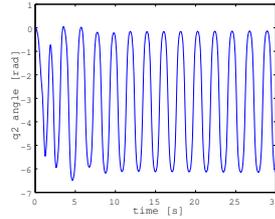


図3 リンク2の角度

図2より、リンク1は $\frac{\pi}{2}$ の近傍で安定していることがわかる。またリンク1の速度も時間が経てばほとんど0になった。リンク2について考えると、図3よりトップポジションの近傍、即ち $q_2 = 0$ 近くまで振り上がってはいるが、安定化まで至ってはいない。これはリアプノフ関数(2)では漸近安定性を保証できなかったためと思われる。エネルギー制御単独ではトップポジションで安定化できないため、近傍まで振り上がった時に安定化制御に切り替えてトップポジションでの安定化を図ることにする。

#### 4 スライディングモード制御

スライディングモード制御は制御構造を変える理論であり、状態を切換え面に拘束させ安定化を図る制御である。ここでは倒立振子にスライディングモード制御を適用し、安定化を試みることにする[3]。

##### 4.1 切換超平面の設計

切換超平面とは、システムの状態を位相平面上で考えた時に、その挙動を拘束し安定化させる役割を果たす。システムの挙動を超平面に拘束することを到達モード、拘束した挙動を原点である平衡点へ収束することをスライディングモードと呼んでいる。ここでは、零点を利用する方法によって超平面を設計していく。スライディングモードを倒立振子へ適用するにあたり、非線形である倒立振子のモデルをトップポジションで線形化を行った。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \sigma = \mathbf{S}\mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

ここで、 $\sigma$ が切換関数、 $\mathbf{S}$ が超平面の傾き、 $\mathbf{x} = [\bar{q}_1, \dot{\bar{q}}_1, q_2, \dot{q}_2]^T$ 、 $\bar{q}_1 = q_1 - \frac{\pi}{2}$ である。線形化を行った結果、トップポジションでの $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 行列は以下のよう  
に与えられる。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 128.0013 & 0 & -29.4233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -132.4140 & 0 & 100.2173 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 16.4058 \\ 0 \\ -24.2433 \end{bmatrix}$$

零点を利用する方法での超平面の設計は、最適レギュレータの理論を用いるのものであり、最適フィードバックゲインを超平面の傾き $\mathbf{S}$ として選ぶ。

$$\mathbf{P}\mathbf{A}_\varepsilon + \mathbf{A}_\varepsilon^T\mathbf{P} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{B}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 0 \quad (7)$$

ここで、 $\varepsilon$ は安定余裕を示し、

$$\mathbf{A}_\varepsilon = \mathbf{A} + \varepsilon\mathbf{I} \quad \varepsilon > 0 \quad (8)$$

である。(7)において $\mathbf{P}$ を求め、 $\varepsilon = 5$ として超平面の傾き $\mathbf{S}$ を下式によって求める。

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}^T\mathbf{P} \quad (9)$$

結果、超平面の傾きは次のように与えられる。

$$\mathbf{S} = [-595 \quad -95.4 \quad -514 \quad -68.4] \quad (10)$$

この超平面を用いてコントローラを設計する。

##### 4.2 コントローラの設計

スライディングモード制御入力は、線形フィードバック制御項 $u_l$ と非線形制御項 $u_{nl}$ の2つの独立した項から構成されていると考えることができる。ここで、

$$u = u_l + u_{nl} = -\mathbf{F}\mathbf{x} - k \frac{\sigma}{\|\sigma\|} \quad (11)$$

となる。 $u_l$ 項の $\mathbf{F}$ を状態軌跡が切換超平面 $\sigma = 0$ にとどまるような制御入力とする。これは等価制御入力と呼ばれ下式で与えられる。

$$\mathbf{F} = (\mathbf{S}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{A} \quad (12)$$

しかし、このままではチャタリング現象が発生したので、非線形入力項を次の平滑な入力

$$u_{nl} = -k \frac{\sigma}{\|\sigma\| + \delta} \quad \delta = 3 \quad (13)$$

として、チャタリング抑止を図った。

##### 4.3 安定化シミュレーション

初期値 $q_1 = 0.41, \dot{q}_1 = 1.56, q_2 = -0.17, \dot{q}_2 = -2.19$ を用いてシミュレーションを行った。

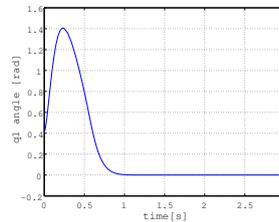


図4 リンク1の角度

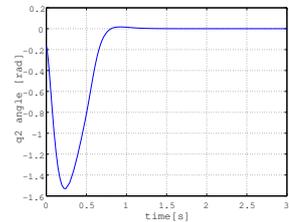


図5 リンク2の角度

図4、5より、リンク1リンク2の角度が共に0となっているため、トップポジションで安定化していることがわかる。

## 5 切り替え制御

エネルギー制御の制御則と、スライディングモード制御の制御則とを切り替えて安定化できるかシミュレーションを行う。 $q_1$  が  $\pm 0.2[\text{rad}]$ 、 $q_2$  が  $\pm 0.3[\text{rad}]$  未満になった時にエネルギー制御からスライディングモード制御に切り替えることにする。

### 5.1 シミュレーション結果

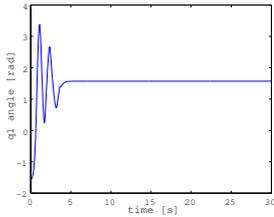


図6 リンク1の角度

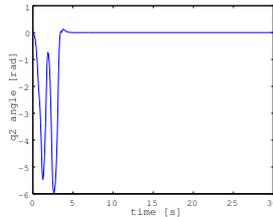


図7 リンク2の角度

振り上げと安定化の制御則を切り替えることによって、ダウンレスタングポジションからトップポジションまで振り上げ、安定化できることがシミュレーションより確認することができた。しかし、シミュレーションは理想的な状態で考えており、実際の装置との違いが存在する。この違いを解決し実際の装置を動かすコントローラ設計を考えていくことにする。

## 6 シミュレーションと実機との違い

シミュレーションと実際の装置との違いを考えると、

- (1)ハードウェアの制約
- (2)状態の測定方法
- (3)摩擦の有無

が考えられる。

(1)はシミュレーションは装置の理想的な形であり、実際にはハードウェアやソフトウェアの制約が存在する。モータの出せるトルクは実際には有限であり、Pendubotではモータが壊れないよう  $\pm 10[\text{Nm}]$  の範囲に限定することにした。シミュレーションを行うと、飽和を行ったことでリンク2がトップポジション近傍まで振り上がらなくなってしまった。そのため、 $k_E = 0.4$ 、 $k_D = 1$ 、 $k_P = 0.957$  から  $k_E = 0.965$ 、 $k_D = 1$ 、 $k_P = 1.345$  にパラメータを変更することでフィードバックゲインを大きくする、また安定化制御を行う領域を  $|q_1 - \frac{\pi}{2}| < 0.3[\text{rad}]$  と広げることでトップポジションで安定化させることができた。

(2)はエネルギー制御、振り上げ制御ともにトルクの算出に  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $\dot{q}_1$ 、 $\dot{q}_2$  の状態を用いた。そのためこれらの値を求めなくてはならない。シミュレーションではこれらの値はラグランジュの運動方程式から算出したが、実験装置ではエンコーダにより  $q_1$ 、 $q_2$  の状態は計測できるものの、 $\dot{q}_1$ 、 $\dot{q}_2$  の状態は計測することができな

い。そのため状態  $q_1$ 、 $q_2$  を微分して過去三項の平均をフィルターしたものをを使うことにした。

## 7 実機での実験

シミュレーションと実際の装置との違いを踏まえて制御アルゴリズムを実機に搭載して実験を行った。しかしながら Pendubot が動かないという問題が発生した。そこで、シミュレーションモデルは摩擦を無視して作っており、 $t = 0$  の時の  $\tau$  の値が小さいため、静止摩擦力に打ち勝つことができないのではないかと仮説を立てた。そこで、振り上げ制御を考えた時に最初はダウンレスタングポジションで静止して  $E(0) = 0$  とした。しかし、 $E(0)$  は 0 である必要は無く、位置エネルギーや運動エネルギーを保持した状態から始めても良い。そこで、0[s] から 0.475[s] の間  $-5.7[\text{Nm}]$  のトルクを、0.475[s] から 0.72[s] の間  $6.6[\text{Nm}]$  の力を加えて倒立振子を動かし、運動エネルギーを持った状態からエネルギー制御によって振り上げを行うことにした。

### 7.1 初期ステップを与えたシミュレーション結果

シミュレーションでは初期値 0、最終値  $-5.7$ 、ステップ時間 0 のステップと、初期値 0、最終値 12.3、ステップ時間 0.457 の 2 つのステップを足し合わせることで Pendubot にエネルギーを持たせるためのステップを作った。また、 $k_E = 0.12$ 、 $k_D = 0.75$ 、 $k_P = 0.6$  とパラメータをそれぞれ変更してシミュレーションを行った。

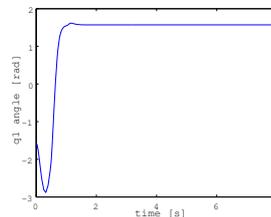


図8 リンク1の角度

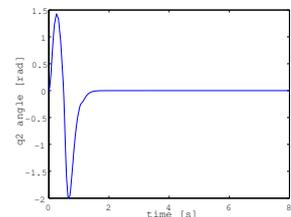


図9 リンク2の角度

最初に振り上げの方向と逆方向にトルクを加えたことでリンク2がスムーズに振り上がり、その結果、飽和させたシミュレーションより安定化するまでの時間を大幅に短縮することに成功した。この方法を用いるとエネルギーを飽和させ、大きな力が出せなくなっても振り上げることができ、しかも短時間で安定化させることができるため非常に良い制御だと言える。

### 7.2 改善したプログラムの搭載

エネルギーの初期値を持たせるためのステップをプログラムに搭載して実験した結果、Pendubot は動いたが、トップポジションの位置とは離れた場所までしか振りあがらなかった。原因を探るためにステップを加えたときの実験とシミュレーションの波形を比べてみると、実験では同じステップを与えてるにも関わらずシミュレーション程振りあがっていなかった。また、連続して実験を行うと徐々に振り上がらなくなっていくという現象が

生じたため、モーターのトルク定数が下がっているのではないかという新たな仮説を立てた。トルクを計測するトルクセンサーが無いため、シミュレーションの実験の結果に近づけるように算出したトルクの数倍をしてやると、約 0.76 倍ではほぼ一致した。そのため、実験のプログラムでは算出したトルクを 1.32 倍するように書き換えて実験を行った。

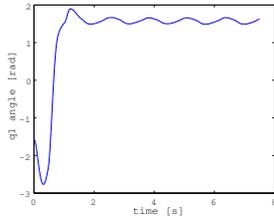


図 10 リンク 1 の角度

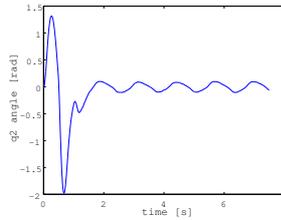


図 11 リンク 2 の角度

リンク 1 リンク 2 の角度には持続振動が起こってしまった。これは、システムの極が虚軸に近過ぎたために起こった現象であると考えられる。よって、安定余裕  $\epsilon$  を 3 から 7 に変化させてやることで極を虚軸から遠ざけて、超平面を新しく設計する。

### 7.3 新しい超平面を用いた実験

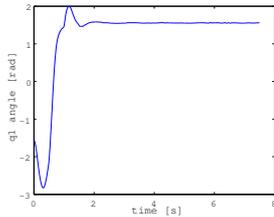


図 12 リンク 1 の角度

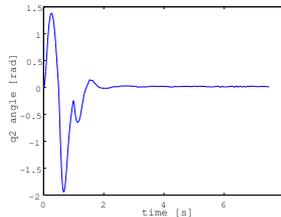


図 13 リンク 2 の角度

実験結果より、リンク 1、2 の角度に生じていた持続振動現象が抑えられていることがわかる。一般にシステムの極の実部を負の方へと大きくすることは、システムの減衰性を向上させる。よって、実験で起こっていた持続振動現象は抑えられた。また、オフセットが残っていないこともわかる。ゲインは、高くしていくとオフセットが減少する性質がある。今回スライディングモード制御は、超平面を設計し直すことでゲインを変化させることができるという特徴も持っている。それを活かし、ゲインを高くしたことでオフセットをほとんどなくすることができたと考えられる。

### 8 追加の実験

図 8、9 と図 12、13 を比較してわかるように実験ではシミュレーションと比べると切り替え時にズレが生じている。これは切り替えがオンオフ制御であったためと思われる。そこで、より良い制御性能を目指すために安定化制御をエネルギー制御とスライディングモード制御

を重みをつけて、トップポジションに近づくにつれエネルギー制御からスライディングモード制御にスムーズに移行するように改良する。スライディングモード制御の制御入力を  $u_1$ 、重みを  $w_1$ 、エネルギー制御の制御入力を  $u_2$ 、重みを  $w_2$  として

$$\begin{aligned} w_1 &= -\frac{5}{3}q_2 + 1 \\ w_2 &= 1 - w_1 \\ u &= u_1w_1 + u_2w_2 \end{aligned}$$

とした。

### 8.1 実験結果

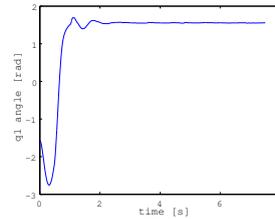


図 14 リンク 1 の角度

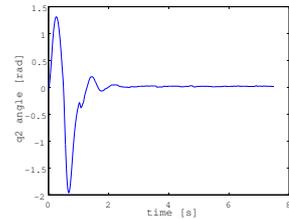


図 15 リンク 2 の角度

切り替えに重みを加えることでリンク 1、2 の急激な変化を抑えることができ、よりシミュレーションに近づいたと言える。

### 9 おわりに

本研究では実験によって以下の成果を得ることができた。リアブノフ関数による非線形振り上げ制御則の導出、トップポジションにおける漸近安定のためのスライディングモード制御則の導出、2 つの制御則の切り替えによる一連の制御の構築、実験による理論の検証である。振り上げ制御では、はじめ切り替えを行う位置まで振り上がらなかったという問題があったが、初めにステップを与えてエネルギーを保持した状態から振り上げる工夫をし、安定化制御では持続振動現象を超平面を変化させる、オフセットをゲインを大きくし目立たなくするというで、それぞれ解決へと導いた。またシミュレーションと実験の比較を行うとほぼ一致しており、構築した一連の理論の有効性が証明できた。

### 参考文献

- [1] 坂野誠一, 川津勇治: 極配置によるペンダボットの制御系設計, 南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文 (2003).
- [2] Isabelle Fantoni, Rogelio Lozano, Mark W.Spong: Energy Based Control of the Pendubot, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.45, No.4, pp.725-729 (2000).
- [3] 野並健蔵: スライディングモード制御, コロナ社 (1994).