

状態フィードバックによる倒立振子の制御

2001MM038 鬼頭 亜矢

2001MM041 光村 奈緒子

指導教員

高見 勲

1 研究の目的・制御対象

本研究では、倒立振子 モデル 505 を使用し、不安定な倒立振子を安定化させて角度制御を行う。目標値に達するまでの応答時間と整定時間を速くすることを目的とする。また、手法として最適レギュレータとアッカーマンの極配置法を用いて、それぞれの特性について比較する。

制御対象は DC サーボモーター、スライディングロッド、高分解能エンコーダ、ドーナツウェイト、黄銅ウェイトから成り立つ倒立振子である。エンコーダで角速度とロッドの長さを計測し、倒立振子の角度制御を行う。状態量を z 、バランスロッドの角度を θ 、角速度を $\dot{\theta}$ 、スライディングロッドの中央から重心までの長さを x 、スライディングロッドの速さを \dot{x} で表す。制御量はバランスロッドの角度 (θ)、操作量は $F(t)$ でバランスロッドの回転トルクである。

Lagrange の方程式を用いて以下の運動方程式を得た [1]。

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x} + m_1 l_o \ddot{\theta} - m_1 x \dot{\theta}^2 - m_1 g \sin \theta &= F \\ m_1 l_o \ddot{x} + J_o \ddot{\theta} + 2m_1 x \dot{x} \dot{\theta} - (m_1 l_o + m_2 l_c) g \sin \theta \\ - m_1 g x \cos \theta &= 0 \end{aligned}$$

これを線形化して次の状態方程式を得た。

$$\begin{aligned} \dot{z}_e &= A z_e + B F \\ z_e &= [\theta \quad \dot{\theta} \quad x \quad \dot{x} \quad \int_0^\infty e dt]^T \end{aligned}$$

また、今回はトラッキング制御を用いたため、拡大系の A_e 行列、 B_e 行列は以下のようになる [2][3]。また、ブロック線図を図 1 に示す。

$$A_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ m_2 l_c g / J^* & 0 & m_1 g / J^* & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ (J^* - m_2 l_o l_c) g / J^* & 0 & -m_1 l_o g / J^* & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_e = \frac{1}{J^*} \begin{pmatrix} 0 \\ -l_o \\ 0 \\ J_{oe} / m_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad J^* = J_{oe} - m_1 l_o^2$$

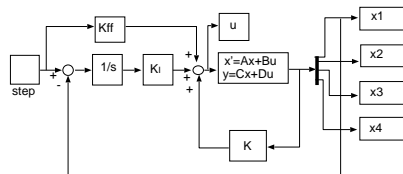


図 1 実験に用いたブロック線図

2 制御手法

状態フィードバックによる倒立振子の制御をするにあたって、速やかで且つオーバーシュートを目標の範囲内におさめるために、最適レギュレータとアッカーマンの極配置という 2 つの制御方法を適用する。この 2 つの制御方法は特性が異なるため、応答時間や整定時間も異なってくる。最適レギュレータでは、初めに重みを与え、極とフィードバックゲインが決定される。一方、アッカーマンの極配置では、安定な極をあらかじめ指定し、ゲインの決定を行う。これらの手法により、減衰比・整定時間などの評価項目の比較により、2 つの制御方法の特徴を明確にする。また、角度 θ [rad] とロッドの位置 x [m] には限界があり、その範囲は $-0.66 \leq \theta \leq 0.66$, $-0.11 \leq x \leq 0.11$ である。

3 最適レギュレータ

3.1 最適レギュレータの設計

最適レギュレータ理論では、与えられた重み行列 $Q = Q^T \geq 0$, $R > 0$ に対して、評価関数

$$J = \int_0^\infty (z_e(t)^T Q z_e(t) + R F(t)^2) dt$$

を導入し、 J を最小化するような状態フィードバックゲイン K を求める [1]。なお、重み行列 Q は対角行列で表すことが多い。今回この倒立振子では、 Q を

$$Q = \text{diag}\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

$$q_1 \geq 0, q_2 \geq 0, q_3 \geq 0, q_4 \geq 0, q_5 \geq 0$$

とし、評価関数 J を

$$J = \int_0^\infty (q_1 z_1(t)^2 + q_2 z_2(t)^2 + q_3 z_3(t)^2 + q_4 z_4(t)^2 + q_5 z_5(t)^2 + R F(t)^2) dt$$

で与える。これより、行列 Q の各値 q_i を大きくすれば、 $z_i(t)$ の収束を重視することになり、 R を大きくすれば、 $F(t)$ の収束を重視することになる。このようにして、最適レギュレータでは、 q_i と R を適当に選ぶことによって、 $z_i(t)$ を速く収束させ、 $F(t)$ を過大にしたいくないという 2 つの相反する事項の妥協をはかる。

また、フィードバックゲインは一意に決まり、

$$K = -R^{-1} B^T P$$

と与えられる。ただし、 P はリカッチ方程式

$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0$ を満足する一意の正定対称解 (すなわち $P = P^T > 0$) である [4]。

3.2 シミュレーション

3.2.1 q_3 の重みの変化

$q_1 = 100$, $q_5 = 1000$ と固定して考える。図 2 は q_3 の重みを変化させたときの支配極と 2nd 支配極の変化である。ロッドの長さに対する重み q_3 を大きくすると、支配極、2nd 支配極ともに原点に近付いていった。ここ

でいう 2nd 支配極とは、極の中で 2 番目に原点に近い極を示す。フィードバックゲインにおいては、わずかに大きくなる。また、シミュレーション結果より、重みを大きくするにしたがって、オーバーシュートは小さくなる。また、振幅や整定時間、操作量に関してはほとんど変化は見られないが、立上り時間がわずかに遅くなるという傾向が見られる。このようなことから q_3 の重みは小さいほうが良いと考えられる。また、 $q_3 < 1$ にした場合、極がごくわずかな数値で負側に近づくものの、その違いはほとんど見られなかったことから、 $q_3 = 1$ とすることにする。

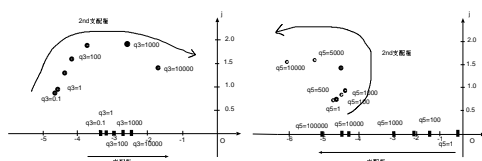


図 2 (左) q_3 を変化させた支配極・2nd 支配極 (右) q_5 を変化させた支配極・2nd 支配極

3.2.2 q_5 の重みの変化

図 3 は q_5 の重みを変化させたときの支配極と 2nd 支配極の変化を示したものである。 q_5 の重みが小さいと、オーバーシュートは小さくなるものの、目標値に達するまでに時間がかかりすぎる結果となる。 q_5 の重みは大きければ大きいほど少しずつ振幅は大きくなるが、遅れ時間・整定時間ともに早くなり、フィードバックゲインも大きくなる。

支配極においても、重みを大きくしていくことによって、負側に大きくなっていく結果が得られた。2nd 支配極においては、重み q_5 をある一定以上大きくすると、負側に大きくなるという傾向が見られた。ここでは、支配極を重点に考えるため、重みは大きい方が良く考えられる。しかし、重み q_5 を大きくするにつれ、操作量も大きくなっていくため、あらかじめ決められた角度 θ とロッドの位置に対する x の許容範囲を越えないように操作していくものとする。

3.2.3 q_1 の重みの変化

図 4 は q_1 を変化させたときの支配極と 2nd 支配極の変化である。角度 θ に対する q_1 の重みを大きくしていくと、支配極は原点に近付き、2nd 支配極はわずかに負側に大きくなっていく。2nd 支配極においては、重み q_1 を大きくしたほうが減衰比の値も大きくなると考えられるが、支配極とは反対の動きを示す。また、フィードバックゲインも重みにともなって大きくなっていく。総合的に立ち上がり時間はほとんど変わらないものの、重みが大きいほうが整定時間が遅くなるという傾向が見られる。このことから、 q_1 の重みは小さいほうが良いと考えられる。しかし、 $q_1 = 1$ では、オーバーシュートが非常に大きく、振動的な波形になる。また、重みが小さい程操作量は大きくなるため、操作量の許容範囲との関係も含めて考えていく。

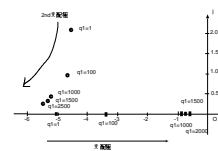


図 3 q_1 を変化させた支配極・2nd 支配極

3.3 実験結果・考察

トラッキング制御を行ったことにより支配極が常に実軸上にあることから、減衰比 ζ は 2nd 支配極に対して考えるものとする。

表 1 より、シミュレーションと実験の違いはそれほど大きいものではなかった。しかし、重みの違いによって評価項目の違いが表れた。 q_1, q_3, q_5 のそれぞれの重みを大きくしていくと減衰比 ζ はほとんど変わらない結果となったが、立ち上がり時間、遅れ時間、行き過ぎ時間ともに速くなり、速応性の良い結果が得られる。また、オーバーシュートも小さくなる。それらを含めシミュレーションを繰り返したところ、図 5 の結果が得られる。これは重みを $q_1 = 1800, q_3 = 1, q_5 = 1000$ としたときのシミュレーションである。このときのフィードバックゲイン K は $[-73.85, -24.61, -177.29, -33.91, 31.62]$ となり、極は $-13.49 \pm 14.98j, -5.35 \pm 0.30j, -0.74$ である。この波形では、はじめに少し振動的な動きが見られるが、評価項目からはシミュレーション値よりもわずかに良い結果となる。 q_1, q_5 の重みを大きくしてこれ以上フィードバックゲインを高くすると許容範囲を越えることとなり、ゲインを下げるさらには振動的な波形になる結果になる。よって、最適レギュレータでは、理論ともほぼ一致し、研究目的に対して満足のいく結果となった。

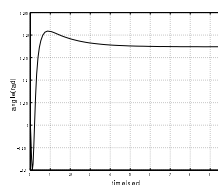


図 4 $q_1 = 1800, q_3 = 1, q_5 = 1000$

表 1 (iii) $q_1 = 1800, q_3 = 1, q_5 = 1000$ の評価項目の比較

指標	シミュレーション値	実験値
減衰比 ζ	0.9982	0.9982
立ち上がり時間 [s]	0.38	0.41
遅れ時間 [s]	0.25	0.28
行き過ぎ時間 [s]	0.71	0.70
y_{max} [rad]	0.21	0.195
オーバーシュート [%]	20.69	12.07

4 アッカーマンの極配置法

4.1 具体的な考え方

制御対象が可制御である場合、状態フィードバック制御 ($F = Kz$) により、閉ループ系の極 (行列 $A_e + B_e K$ の固有値) の位置を任意に指定することができる。この性質を利用して、希望する閉ループ極から状態フィードバックゲイン K を定める設計法が極配置法である。フィードバック制御の最も基本的な要求は、閉ループ系の安定性を保証することである。系が安定であるためには、その行列 A_e の固有値の実部が、すべて負でなくてはならない。またフィードバックゲイン K は実数でなければ意味がないので、複素数を指定するときには、必ず共役な複素数も指定しなければならない。さらに虚部は振動性に関連しているため一般的には、積極的に振動的な応答を発生させることは良くない。よって実部に対して虚部を大きくすることは良くない。今回の研究では、「実部の絶対値 \geq 虚部の絶対値」という目安ですめるものとする。また、MATLABを用いて行列 A の固有値を求めたところ、 $\pm 6.71j, \pm 3.51$ となった。固有値の実部がすべて負ではないので、安定とは言えない。 -3.51 以外は条件を満たしておらず、今回の研究では実部が -3.5 以下の複素数の極で考えるものとする。以上の条件を満たす範囲は図5の左側のようになる [2]。

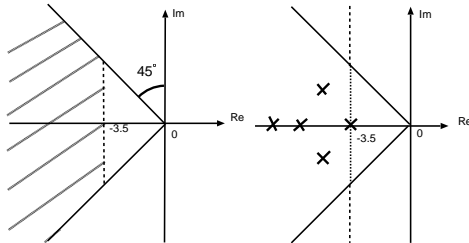


図5 左:理想的な極配置可能範囲,右:好ましい極配置パターン

4.2 シミュレーションと制御実験

安定領域の中で、(i)1つの実数極とそれより小さく、かつ虚軸に平行な線上にある4つの複素数極で成り立つ場合、(ii)3つの実数極と、それより小さい2つの複素数極からなる場合、(iii) -3.5 とそれより小さい異なる実部からなる2組の共役な複素数極で成り立つ場合、(iv) -3.5 とそれより小さい実部をもつ複素数極とさらに小さい2つの実数で成り立つ場合、(v) -3.5 とそれより小さい4つの実数極で成り立つ場合という5パターンに分けて、どのパターンがよい応答をするかシミュレーションで検証する。5パターンのうち一番好ましい応答をしたのは、 -3.5 とそれより小さい実部をもつ複素数極とさらに小さい2つの実数で成り立つ場合であり、極配置パターンは図5の右側のとおりである。その極は、 $-3.5, -8.0 \pm 2.0j, -9.0, -10.0$ 、その時の支配極

は -3.5 、2nd 支配極は $-8.0 \pm 2.0j$ 、フィードバックゲインは、 $[-76.09 \ -22.10 \ -162.52 \ -31.14 \ 81.77]$ 、減衰係数は 0.97 となる。さらにシミュレーションと実測値の比較が表2に示す。

表2 シミュレーション値と実測値の比較

評価項目	シミュレーション値	実測値
立ち上がり時間 [sec]	0.40	0.35
遅れ時間 [sec]	0.38	0.30
オーバーシュート [%]	63.79	83.91

4.3 考察

シミュレーション結果と実際の応答を比較してみると、だいたい同じような形をしていることがわかる。本研究においては、できるだけ立ち上がりが速く、オーバーシュートが少ない極配置を望ましい極配置として考える。その結果を見ると、立ち上がり時間はパターン (ii),(iii),(iv) が速く、オーバーシュートについてはパターン (i), (v) がとも一番少なかった。しかし速応性を考えると立ち上がり時間が遅いものは好ましい応答とは言えない。(i)の極は、 $-3.5, -8.0 \pm 2.0j, -8.0 \pm 4.0j$ というように4つの極が同一直線上に存在し、実測値のオーバーシュートが大きすぎることに気になる。(ii)の極は $-3.5, -7.0, -8.0, -9.0 \pm 3.0j$ であり、2nd 支配極、3rd 支配極ともに虚部がなく、実軸上に存在するパターンである。立ち上がり時間がパターン (i), (v) よりは段然速く、オーバーシュートもパターン (iii) ほど大きくない。(iii)の極は、 $-3.5, -6.0 \pm 3.0j, -8.0 \pm 4.0j$ であり、支配極と2nd 支配極の実部の距離が他のパターンよりも近い。立ち上がり時間はよく、シミュレーション値と実測値の誤差は 11.5% で比較的少なかった。(iv)の極は、 $-3.5, -8.0 \pm 2.0j, -9.0, -10.0$ であり、虚部をもつ極が、2nd 支配極だけで、しかも比較的負側に大きい実部をとっている。立ち上がり時間は $0.40[\text{sec}]$ と速かった。(v)の極は、 $-3.5, -6.0, -7.0, -8.0, -9.0$ であり、すべて実軸上に配置し、減衰比 ζ が1である。5つのパターンの応答を比較すると、パターン (iv) の極配置が速応性、安定性ともに優れていると考えられる。パターン (iv) のシミュレーション結果は、図6の左側のようになった。しかし、オーバーシュートが 50% を超え、あまりにも大きすぎるため支配極を -3.5 に固定せず、もっと原点に近づけて再び先程の5パターンに沿って応答改善を試みた。結果は、パターン (iii) の極配置パターンで、シミュレーション結果は図6の右側のようになった。またシミュレーションを重ねるうちに支配極を原点に近づけることでフィードバックゲイン K_5 の値だけが顕著に小さくなることが判明した。 K_5 はトラッキングの部分のフィードバックゲインであり、 K_5 の値が大きいとオーバーシュートが大きくなってしまいうことがわかった。以上のことより、配置可能範囲を極の実部が -3.5 以下になるようにするという規定を取り除くと、

配置パターン (iii) が望ましい配置パターンとなり、中でも極が $-0.8, -5.0 \pm 1.5j, -15.0 \pm 13.0j$ のときオーバーシュートが 20.69[%] となり、最も理想的な応答になった。しかし、パターン (iv) と (iii) の配置を比べてみると、支配極、2nd 支配極の位置関係は同じであり、異なるのは一番実部が小さい極だけである。原点から離れれば離れるほど支配力は小さくなるので、3rd 支配極などの実部が小さい極はあまり支配力をもたないため、実数であろうと複素数であろうと支配極や 2nd 支配極に対する影響はあまり変わらない。よってパターン (iv) と (iii) はよく似た配置パターンであると考えられる。

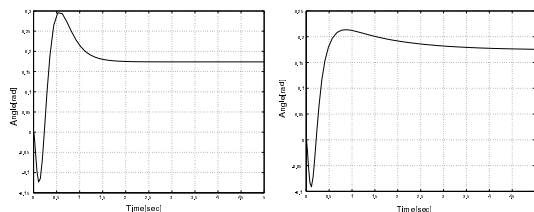


図 6 左: パターン (iv) のシミュレーション, 右: 改善後のシミュレーション

5 最適レギュレータとアッカーマンの極配置法による応答の比較

これまで最適レギュレータは重みを変えることによって、極配置法は安定条件領域内で自由に極を配置することによってそれぞれフィードバックゲインを求めてきた。ここでは、速応性、安定性 (減衰性) の両面からどちらがより適した制御方法なのか、表 3 のように指標ごとに比較する。なお極配置法については、結果として支配極を -3.5 に固定しない時の方が好ましい応答をしたため、パターン 3 の極配置の中の最も理想的な結果を出した極配置で比較する。

支配極に関しては、レギュレータも極配置法も -0.9 から -0.7 の間でだいたい同じであった。また、立ち上がり時間はほぼ同じ値、遅れ時間はレギュレータがよい結果を得ることができたが、ほとんど差は見られなかった。オーバーシュートに関してはレギュレータが 12.07[%]、極配置法が 20.69[%] というかなり理想的な結果に近付いた。特に配置法に関しては支配極を -3.5 に固定していたときに比べると比べものにならないほどオーバーシュートが小さくなり、50[%] 以内に入っているため応答改善が確認できた。実際の実験の波形から見てもレギュレータと極配置法という 2 つの制御手法の間で大差はないということがわかった。なお極配置法でオーバーシュートが多すぎる原因が支配極の位置が大きく異なることであるということは応答改善で実証されている。またオーバーシュートについて実測値がシミュレーション値を上回る理由としては、制御対象が元々もつ非線形性や、またスライディングロッドを滑らせる役割をもつ

ライディングベルトの歯車によるバックラッシュの影響であると考えられる。以上をまとめると、レギュレータと極配置法を比べたところ、極配置法で -3.5 より負側に大きいという規定をなくせば、どちらの手法もそれほど変わりはないという結果になった。

最適レギュレータでは、状態変数の重みを与えることにより、操作量 $F(t)$ の変動を操作し、状態変数の変動を速く到達させることができる。一方、極配置法ではあらかじめ極を指定するため、操作量の変動は操作できないが、応答のスピードを規定することができる。このように目的に合わせて手法を選び、制御をしていくことが必要であることが分かった。

表 3 最適レギュレータとアッカーマンの極配置法の指標別応答比較

指標	レギュレータ	極配置
支配極	-0.74	-0.80
2nd 支配極	$-5.4 \pm 0.3j$	$-5.0 \pm 1.5j$
3rd 支配極	$-13.5 \pm 14.9j$	$-15.0 \pm 13.0j$
減衰比	0.99	0.96
立ち上がり時間	0.41	0.43
遅れ時間	0.28	0.35
オーバーシュート	12.07	20.69

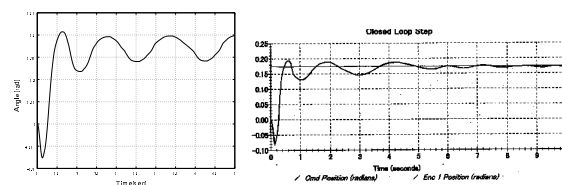


図 7 左: 極配置法の実測データ, 右: レギュレータの実測データ

参考文献

- [1] モデル 505 マニュアル倒立振り子システム
- [2] 川田昌克・西岡勝博: MATLAB/Simulink によるわかりやすい制御工学, 森北出版 (2001).
- [3] 岩井善太・石飛光章・川崎義則: 制御工学, 朝倉書店 (1999)
- [4] 川谷: MATLAB 入門編, <http://feedback.mech.fukui-u.ac.jp/matlab/matlab1.htm>.