スポーツのOR
– サッカーのペナルティキックについて –

2001MM068 太田 雄大
指導教員　鈴木 敦夫

1　はじめに

ペナルティキック (PK) は得点に直接関わっており試合の勝敗を大きく左右する。またペナルティキック (PK) 戦は通常の試合時間中に勝敗が決しなかった場合に両チーム互いに連続して PK を行う。多く得点を決めたチームが勝利する。PK 戦はワールドカップなど重要な試合でよく用いられている。PK は心理戦や運といった解釈のみがされており、過去に数理的な分析はほとんどされていない。本研究ではキッカーとゴールキーパーそれぞれにとって有効な戦略を、数学モデルを作成し、実際のデータを用いて有効性を調べる。

2　研究方針

ゲームの理論を用いてサッカーの PK における最適な戦略を考案する。プレイヤーをキッカーとゴールキーパーとしてそれぞれの戦略を考え、混合戦略を求める。その際キッカーのにとっての利得を求めるためにゴールの枠外に外す確率をコース別に 2 変量正規分布より求める。

3　データについて

Ｊリーグ、日本代表における試合中に起こった PK
・成功/失敗（2000〜2004）
・キッカーの利き足（2000〜2004）
・キッカーが蹴ったボールの位置座標 (2003〜2004)
・GK の動き（2003〜2004）
データ提供：J スタッツオプタ事務局
世界の国際大会（ワールドカップなど）の PK 戦 13 試合分のデータを自己作成（内容は PK のデータと同じ）

4　2 変量正規分布

独立系 2 変量正規分布の確率密度関数は、平均を μ_x,μ_y とし標準偏差を σ_x,σ_y とすると

$$f(x,y) = f(x) \cdot f(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} exp\left\{ -\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2} \right\} \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} exp\left\{ -\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2} \right\}$$

となる。[4]

5　キッカーがゴールの枠外に外す確率

コースはそれぞれキッカーから見て 1(ゴール左上)、2(真中上)、3(右上)、4(左下)、5(真中下)、6(右下) とし、2 変量正規分布を用いてコース別に枠外（ゴールポストも含む）に外す確率を計算する。

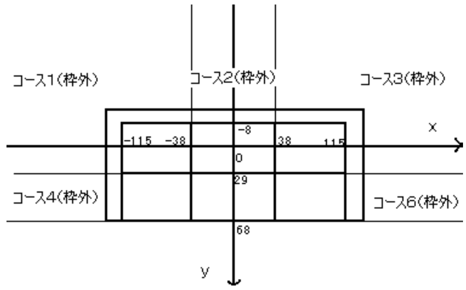

図 1　キッカーがボールを蹴った位置座標

キッカーが各コースを狙ったとき、実際には、2 変量正規分布に従ってバラつくと仮定して枠外に外す確率を計算した。その際、平均と標準偏差はデータから計算した。枠外に外さない確率（1 −（枠外に外す確率））は表 1 のようになる。PK 戦のキッカーが左利きのデータが少ないので省く。

表 1　キッカーの利き足別、蹴ったコース別の枠外に外さない確率

コース	1	2	3	4	5	6
PK　（右利き）	0.707	0.999	0.619	0.852	1.000	0.890
PK　（左利き）	0.780	なし	0.787	0.762	1.000	0.872
PK 戦（右利き）	0.814	0.742	0.785	0.959	1.000	0.963

6　ゲームの理論

ゲームの理論を導入しキッカーとゴールキーパーの 2 人零和ゲームを考える。キッカーがどのコースにどんな割合で蹴るのが最適か、ゴールキーパーがどの方向にどんな割合で反応するのが最適かを混合戦略を用いて解く。

6.1　定義

i = キッカーがボールを蹴るコース $[i = 1,2,3,4,5,6]$
j = ゴールキーパーが反応するケース $[j = 1,2,3,4]$（ゴールキーパーの視点でそれぞれ右、左、逆方向に反応し直す、中央）
x_i = キッカーがコース i にボールを蹴る確率
y_j = ゴールキーパがケース j を選択する確率
c_{ij} = キッカーがコース i にボールを蹴って、ゴールキーパーがケース j を選択した場合のゴールする確率（利得）

$$w_k = \min\left\{ \sum_{i=1}^{6} c_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{6} c_{i2}x_i, \sum_{i=1}^{6} c_{i3}x_i, \sum_{i=1}^{6} c_{i4}x_i \right\}$$

$$w_g = \max\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^{4} c_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{4} c_{2j}y_j, \sum_{j=1}^{4} c_{3j}y_j \\ , \sum_{j=1}^{4} c_{4j}y_j, \sum_{j=1}^{4} c_{5j}y_j, \sum_{j=1}^{4} c_{6j}y_j \end{array} \right\}$$

6.2 線形計画法

キッカーにとっての最適な混合戦略を求める線形計画法は次のようになる

$$\max w_k$$

$$\text{制約条件}：\sum_{i=1}^{6} c_{ij}x_i \geq w_k, j = 1,2,3,4$$

$$\sum_{i=1}^{6} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1,2,3,4,5,6$$

またゴールキーパーについては次のようになる。

$$\min w_g$$

$$\text{制約条件}：\sum_{j=1}^{4} c_{ij}y_i \leq w_g, i = 1,2,3,4,5,6$$

$$\sum_{j=1}^{4} y_j = 1$$

$$y_j \geq 0, j = 1,2,3,4$$

6.3 変数変換による簡単化

キッカーの最適な混合戦略を求める線形計画法の最初の制約条件式の両辺を w_k で割り $X_i \equiv \frac{x_i}{w_k}$ とおくと簡単な線形計画法になる (w_k は正 (PK で c_{ij} はすべて正) なので不等号の向きは変わらない)。ゴールキーパーについても同様に $Y_j \equiv \frac{y_j}{w_g}$ とおいて簡単化する。

6.4 c_{ij} の求め方

キッカーがコース i を選択しゴールキーパーがケース j を選択した時のゴールする確率 c_ij(利得) は [ゴールキーパーのケース別、ゴールのコース別のキッカーの成功率] × [キッカーが枠外にボールを外さない確率 (コース別)] で求まる。ゴールキーパーのケース別、ゴールのコース別のキッカーの成功率) はデータから計算できる。

6.5 結果

表 2　キッカーとゴールキーパーの利得表　PK右利き

キッカー＼キーパー	1	2	3	4
1	0.707	0.707	0.707	0.707
2	0.619	0.619	0.619	0.619
3	0.639	0.852	0.767	0.852
4	0.890	0.641	0.890	0.890

キッカーがボールをコース 2，5（中央）に蹴るデータが PK のデータにおいては少ないのでキッカーの戦略は 2，5 を省き 1（左上 [コース 1]）、2（右上 [コース 3]）、3（左下 [コース 4]）、4（右下 [コース 6]）として検証する。ゴールキーパーは 6.1 の定義どおりの戦略を行う。PK の右利きのキッカーにとっての c_{ij} を計算し利得表を作成すると表 2 のようになる。利得を線形計画法を用いて計算すると、

$X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0.714, X_4 = 0.610, \sum_{i=1}^{4} X_i = 1.324$ となる。よってキッカーの最適な混合戦略は $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0.54, x4 = 0.46$ になる。

同様に $Y_1 = 0.605, Y_2 = 0.719, Y_3 = 0, Y_4 = 0, \sum_{j=1}^{4} = Y_j = 1.324$ となる。よってゴールキーパーの最適な混合戦略は $y_1 = 0.46, y_2 = 0.54, y_3 = 0, y_4 = 0$ になりゲームの値は 0.7547 である。

左利きのキッカーについても利得表を作り計算すると、$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$、$y_1 = 0, y_2 = 0, y_3 = 1, y_4 = 0$ になりゲームの値は 0.7869 である。

PK戦の右利きのキッカーについても同様に計算すると $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0.27, x_5 = 0.18, x_6 = 0.55 y_1 = 0.39, y_2 = 0.53, y_3 = 0, y_4 = 0.08$ になり

ゲームの値は 0.787 である。[3]

6.6 まとめ

J リーグの PK において右利きのキッカーはゴール左下、ゴール右下を狙って蹴るのが最適でゴール左下により多く（数値参考）蹴るのが望ましい。ゴールキーパーはゴールキーパーから見て左右に反応するのが最適で左により多く（数値参考）反応するのが望ましい。左利きのキッカーは右利きに比べデータが少ないのでキッカー、ゴールキーパーの最適な戦略は 1 つしかなく、純粋戦略になってしまったが、キッカーはゴール右上を狙うのが最適だということは検証できた。国際大会における PK 戦では、右利きのキッカーはゴール右下に割合を多く蹴る（数値参考）のが最も最適で続いてゴール左下、ゴール中央に蹴るのが望ましく、ゴールキーパーは左に反応する割合を多くする（数値参考）ことが最も最適で順に右に反応、中央に反応が望ましい。キッカーはゴールの枠内高めにボールを蹴られれば，キーパーに防がれる可能性はかなり低いが逆にゴールポスト、枠外に外す確率は高くなり、全体を見ても左右低めにボールを蹴るのが最適であることがわかった。

7 おわりに

ゲームの理論を用いてキッカーの利き足別に最適な戦略を求めることができた。しかしより制度の高いな戦略を求めるには、より多くのデータが必要であった。また全体としてではなく個々の選手対選手で最適な戦略を求めることもデータ不足からできなかった。データがあればこれも分析可能である。また J リーグにおいての PK や国際大会における PK 戦で本研究の結果が実際に活用できるように今後研究の水準を上げて行きたい。

参考文献

[1] J リーグ公認データ　提供：J スタッツオプタ事務局

[2] サッカールール蹴球規則 http://www.soccerkisoku.com/

[3] 小和田正，澤木勝茂，加藤豊：OR 入門 意思決定の基礎，実教出版 (1984)

[4] 白旗慎吾：統計解析入門，共立出版（1992）