ファーストフード店における待ち行列について
– レジにおける待ち行列と注文した商品における待ち行列 –

2001MM043 高阪 美月　　2001MM051 森山 真理子
指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

私達の生活には, 多くの待ち行列が存在している. 例えば病院やテーマパーク, レストラン, レジなど様々なところで起こっている. その中でも今回はファーストフード店における待ち行列について考えていきたい.

ファーストフード店に行くと, いつも待ち行列ができている. 得に昼時などの食事時には長い行列ができる. この待ち行列は, レジにおける待ち行列と, 注文した商品における待ち行列の 2 つの待ち行列に分けて考えることができる. そこで本論文では, これら 2 つの待ち行列において, 待ち時間の軽減のために考えらるいくつかのモデルについて研究していく.

2　モデルの設定

レジにおける待ち行列と注文した商品における待ち行列を別々に考え, 全体の平均待ち時間を求めていく.

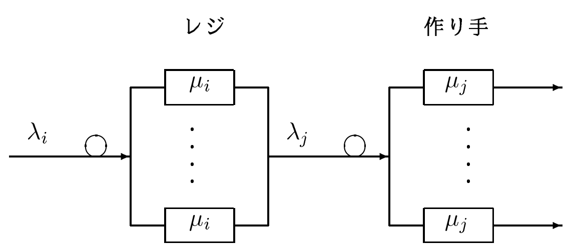

図 1　モデルの図

レジにおける待ち行列は, 客が平均到着率 λ のポアソン到着, 平均サービス率 μ の指数サービス時間に従う,s 個の窓口がそれぞれ独立した $M/M/1$ モデルとする.

注文した商品における待ち行列は, 客が平均到着率 λ のポアソン到着, 平均サービス率 μ の指数サービス時間に従う, 窓口 s 個の $M/M/s$ モデルとする.

2.1　レジにおける待ち行列

[モデル 1]
混雑している場合, 客はレジでの対応を受けるために待たなければならない. しかし, レジの窓口一つずつに並ぶと前の客のレジでの滞在時間に差があり, 必ずしも一番早くサービスを受けられるとは限らない. そこで, 客は一列に並び空いた窓口で順に対応を受ける $M/M/s$ モデルとする.

[モデル 2]
混雑している場合, 一列に並ぶと行列長が長くなり, 諦めて帰ってしまう客もでてくる. そこで,3 人まではレジの窓口一つずつに並び, それ以降は一列で並ぶモデルと 2 人まではレジの窓口一つずつに並び, それ以降は一列で並ぶモデル ($M/M/1$ と $M/M/s$ モデルの中間モデル) とする.

2.2　注文した商品における待ち行列

窓口で注文を受けたの順に注文表を 1 列に並べるものとし, 順に s 人の作り手が 1 人 1 注文表を請け負うものとする.

[モデル 3]
最も一般的である, 注文した順番にサービスを受ける先着順モデルを考える.

[モデル 4]
時間指定ができる電話注文のサービスを導入した際の, 非割り込み優先モデルを考える.

3　モデル 1

窓口が s 個存在し,M/M/s に従うとする. 行列の長さの平均値は

$$\begin{aligned} L_q &= \sum_{n=s}^{\infty}(n-s)p_n \\ &= \frac{\lambda^{s+1}}{(s-1)!(s\mu-\lambda)^2\mu^{s-1}}p_0 \end{aligned} \tag{1}$$

となる. よって, 平均滞在時間は

$$W = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \tag{2}$$

下表は最も混雑する昼食時 12 時から 13 時までのデータをもとに窓口数と平均滞在時間を計算した結果である.

窓口数	サービス率	到着率	平均滞在時間
1	2.34	1.88	2.1739
2	2.34	1.88	0.5096
3	2.34	1.88	0.4376

表 1　平均滞在時間

λ を 0.05 から 2.0 まで変化させた場合の平均滞在時間を, 窓口が一個から三個のときの違いを考える.

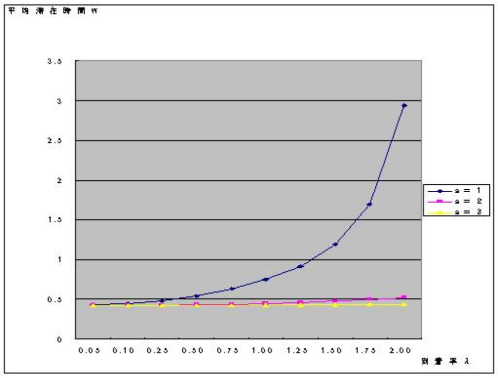

図 2　λ を変化した場合の平均滞在時間

これより, 平均滞在時間が 0.5 を越えると混みだすので, 窓口が一個のとき $\lambda = 0.5$ よりも大きいときは窓口を二個に増やし,$\lambda = 1.75$ よりも大きいときは窓口を三個に増やすと待ち時間が軽減される.

4　モデル 2

窓口が s 個あり,3 人までは並列で並び, それ以降は一列で並ぶモデル. お客の数が $3 \times s = 3s$ よりも少なければ、並列モデル $(M/M/1)$ に従うので、$n \leq 3s$ のとき、窓口 i の平均滞在時間 W は、

$$W_i = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \tag{3}$$

よって、窓口 i の全体の平均滞在時間は

$$W = \frac{\sum_{i-1}^{s} W_i}{s} \tag{4}$$

$n > 3s$ のとき、1 つの窓口に 3 人まで並び、それ以降は $M/M/s$ モデルに従うので、平均滞在時間は

$$W = \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \tag{5}$$

となる.

これより, モデルの全体の平均滞在時間は

$$W = \frac{\sum_{i-1}^{s} W_i o}{s} + \frac{L_q}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \tag{6}$$

となる.

4.1　数値結果

窓口に三人まで並ぶ場合について, 窓口毎の平均滞在時間を考える.

窓口	サービス率	到着率	平均滞在時間
s_1	2.45	0.61	0.5182
s_2	2.36	0.65	0.5492
s_3	2.55	0.62	0.4955

表 2　窓口に三人まで並ぶ場合の窓口毎の平均滞在時間

これより, 窓口が二つの場合に最も平均滞在時間が短くなるのが s_1 と s_3 の窓口を利用するときだから, 窓口二つの時の平均滞在時間は,0.5069 になる. また, 窓口が三つの場合, 平均滞在時間は 0.5209 となることがわかった.

また, 窓口に二人まで並ぶ場合について, 窓口毎の平均滞在時間を考える.

窓口	サービス率	到着率	平均滞在時間
s_1	2.45	0.61	0.4664
s_2	2.36	0.65	0.4863
s_3	2.55	0.62	0.4476

表 3　窓口に二人まで並ぶ場合の窓口毎の平均滞在時間

これより, 窓口が二個の場合に最も平均滞在時間が短くなるのが s_1 と s_3 の窓口を利用するときだから, 窓口二個の時の平均滞在時間は、0.4570 になる. また, 窓口が三個の場合、平均滞在時間は 0.4667 となることがわかった. このことから, 窓口に三人まで並ぶ場合よりも窓口に二人まで並ぶ場合のほうが平均滞在時間が短いことがわかった.

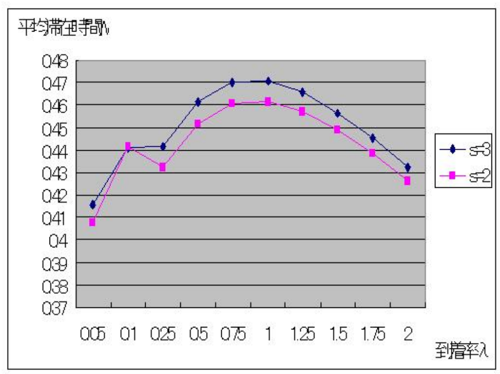

図 3　λ を変化した場合の平均滞在時間

これより, 平均滞在時間が 0.5 を越えると混みだすが,0.5 を越える数値がないため窓口を二つ以上に増やす必要がないことがわかった.

5　考察

モデル 1, モデル 2 を比較してみると, 窓口が二個のときはモデル 2 の窓口に二人まで並ぶ場合が最も平均滞在時間が短くなることがわかった. また, 窓口が三個の場合では, モデル 1 が最も平均滞在時間が短くなることがわかった. また, 行列長について考えると, モデル 1 では同じ人数が並んでいても諦めて帰ってしまう客や途中で立ち去ってしまう客もでてくるだろう. そのため, 行列長が長くなった場合の客の立ち去りを考慮するならば行列長の短いモデル 2 のほうが最善といえる.

6　モデル 3

最も一般的である,$M/M/s$ の先着順モデルについて数値解析を行う.

6.1　作り手の人数による平均滞在時間の比較

作り手の人数を 1 人,2 人,3 人と場合分けし, それぞれの平均滞在時間を求め比較を行う．なお、代入する数値は最も混雑する昼食時 12 時から 13 時までのデータをもとに出したものである.

平均 1.645 分 (98.676 秒) に 1 注文入り,1.526 分 (91.556 秒) に 1 注文完了する.

	$s=1$	$s=2$	$s=3$
W	21.277	1.946	1.582

表 4　作り手が 1 人,2 人,3 人の場合の平均滞在時間

〈考察〉

作り手が 1 人の場合は, 平均滞在時間が約 21 分にもなり, これではファーストフード店の意味をなさないことがわかる. しかし作り手が 2 人以上になると,1 人のときの $\frac{1}{10}$ 以下になり, 作り手の人数は少なくとも 2 人以上にすると良いことが明らかである. また, 作り手の人数を 3 人にすれば, 注文した商品における待ち行列はほぼなしでサービスすることができる.

6.2　到着率を変化させたときの平均滞在時間の比較

サービス率は $\mu=0.655$ とし, 到着率を 0.05 から 0.50 まで 0.05 づつ変化させ, 平均滞在時間を求める. そのとき, 作り手の人数を 1 人,2 人,3 人と場合分けし, 到着率が増えた場合において, 作り手の人数をどのように増やせばよいか考察する.

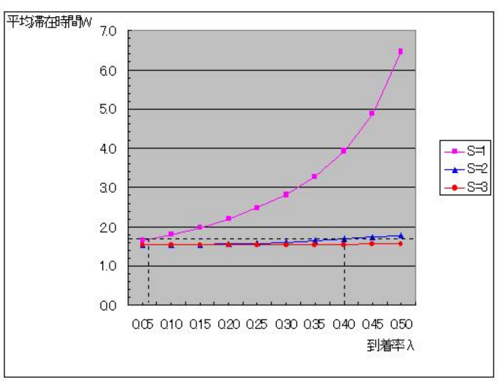

図 4　λ を変化させた場合の平均滞在時間の推移

〈考察〉

集計したデータによると,1.645 分に 1 つ注文が入る到着率なので, 注文した商品の系内における平均滞在時間が $W=1.7$ を超えると待ち時間が長くなり混雑すると考えられる. よって平均滞在時間が 1.7 を超えないように作り手の人数を変えていかなければならない. グラフより, 到着率が 0.067 を超えたときに作り手の人数を 1 人から 2 人に増やし, 到着率が 0.418 を超えたときに作り手の人数を 2 人から 3 人に増やせば, 注文した商品における待ち行列はほぼなしで, サービス時間のみの待ち時間でサービスすることができる.

7　非割込み優先モデルの解析

システム全体でみると, ある人のサービスが終了したとき, 次に誰がサービスを受けようとも客の総数が 1 人減るだけで平衡方程式に変化はない. ゆえに, システム全体において, サービス順は影響を与えないことがわかる. しかし, 待ち時間の分布に影響が出ることが予想される.

これ以降より, 順位 (クラス) ごとの平均待ち時間について解析する.

7.1　平均待ち時間

優先順位をクラス (1), クラス (2),⋯, クラス (r) として r 種類考える.

クラス (1) > クラス (2) > ⋯ > クラス (r)

λ_k : クラス (k) の到着率

λ=$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_r$: システムへの全到着率

μ : サービス率

クラス (k) の客の平均滞在時間は

$$W^{(k)}=\frac{\frac{\pi_0}{s\mu}}{\left(1-\frac{1}{s\mu}\sum_{j=1}^{k-1}\lambda_j\right)\left(1-\frac{1}{s\mu}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\right)}+\frac{1}{\mu} \tag{7}$$

となる.

よって, これが割り込みのない優先権を与えたときの平均滞在時間を求める式である.

8　モデル 4

多くのファーストフード店では, 電話注文によるサービスを請け負っており, このサービスは時間指定をすることができる. そのため, 指定された時間までに品物が出来上がるように, 来店した客による注文の待ち行列に割り込むことになる. つまり, 前章で定式化した非割り込み優先モデルにおいての,2 種類の優先順位を与えたモデルと考えることができる. そこでこれ以降より, 非割り込み優先モデルを用いた様々な数値解析を行っていく.

9　作り手の人数による平均滞在時間の比較

実際に集計したデータをもとに数値解析を行う.

作り手の人数を 1 人,2 人,3 人と場合分けし, それぞれの平均滞在時間を求め比較を行う. なお, 代入する数値も 6.1 と同じく最も混雑する昼食時 12 時から 13 時までのデータをもとに出したものを使う.

平均 1.645 分 (98.676 秒) に 1 注文入り,1.526 分 (91.556 秒) に 1 注文完了する.

	$s=1$	$s=2$	$s=3$
$W^{(1)}$	4.171	1.819	1.572
$W^{(2)}$	38.382	2.073	1.593

表 5　作り手が 1 人,2 人,3 人の場合の平均滞在時間

〈考察〉
作り手が 1 人の場合は,$W^{(2)}$ の値が 38 分にもなり $W^{(1)}$ との平均滞在時間の差があまりにも大きすぎる. しかし作り手が 2 人以上になると,$W^{(2)}$ では作り手が 1 人のときの $\frac{1}{18}$ 以下になり, 大幅に短縮される. また, 作り手の人数を 3 人にすれば, どちらの優先順位の客にも, ほぼ同じ平均滞在時間でサービスでき, また, 商品における待ち行列も, ほぼなしでサービスすることができる.

10　到着率を変化させたときの平均滞在時間の比較

サービス率を $\mu=0.655$ とし, 到着率を 0.05 から 0.50 まで 0.05 づつ変化させ, 平均滞在時間を求める. そのとき, 作り手の人数を 1 人,2 人,3 人と場合分けし, 到着率が増えた場合において, 作り手の人数をどのように増やせばよいか考察する.

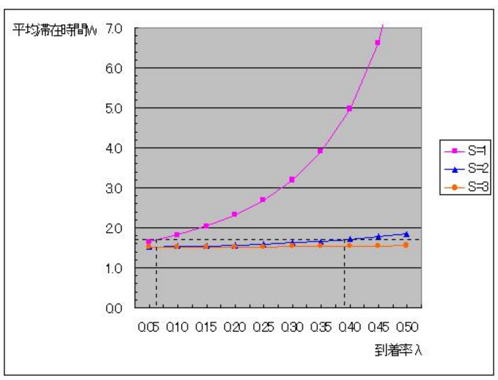

図 5　λ を変化させた場合の平均滞在時間の推移

〈考察〉
集計したデータによると,1.645 分に 1 つ注文が入る到着率なので, 注文した商品の系内における平均滞在時間が $W=1.7$ を超えると待ち時間が長くなり混雑すると考えられる. そのため, 平均滞在時間が 1.7 を超えないように, 作り手の人数を変えていかなければならない. なお,$W^{(2)}$ がこの条件を満たせば, $W^{(1)}$ も成立するので,$W^{(2)}$ の値のみで考える. グラフより, 到着率が 0.064 を超えたとき作り手の人数を 1 人から 2 人に増やし, 到着率が 0.389 を超えたとき作り手の人数を 2 人から 3 人に増やせば, 注文した商品における待ち行列はほぼなしで, サービス時間のみの待ち時間でサービスすることができる.

11　最善モデル

モデル 1 からモデル 4 までの数値結果をもとに, 最善モデルを考える.

11.1　混雑時における最善モデル

レジにおける待ち行列では, 数値的にみると, モデル 1 で窓口が 3 個の場合が $W=0.4376$ で最も早い. しかし, モデル 2 で各窓口に 2 人まで並ぶ窓口 2 個のモデルは $W=0.4570$ で, その差は約 1.2 秒しかないので, 行列長が長くなった場合の客の立ち去りを考慮するならば, 行列長の短いモデル 2 の方が最善と言える.

注文した商品における待ち行列では, 先着モデルでも非割り込み優先モデルでも, 作り手の人数を 3 人にすれば, サービス時間のみの待ち時間でサービスすることができる.

よって, 全体の平均滞在時間は 0.457+1.582 で 2.039 となる.

12　おわりに

レジにおける待ち行列については, 一列に並ぶことで行列長が長くなり, 店舗の広さにも限界があるため, 少人数だけ並列で並び, それ以降が一列で並ぶというモデル 2 を考えた. 窓口が二個のときはモデル 2 が, 窓口が三個の場合はモデル 1 が最短であったが, 行列長を考えると一概にモデル 1 が最適であるとは言い切れないため, 総合的に見て, モデル 2 を改善案として導入できるだろう.

注文した商品における待ち行列では, 先着順モデルと非割り込み優先モデルの 2 種類を考えた. どちらのモデルも, 作り手の人数を 3 人にすればサービス時間のみの待ち時間で済むことがわかった. しかし, レジにおける待ち行列のように並び方を変えたり, 複数の作り手による流れ作業で注文を請け負うようにすれば, より良い結果が得られたと考えられる.

謝辞

本論文を進めるにあたり,2 年間ゼミを通して御指導頂いた澤木勝茂教授, また, 多くの助言, 御協力を頂いた方々に深く感謝致します.

参考文献

[1] 森村英典, 大前義次：応用待ち行列理論, 日科技連 (1975).

[2] 小和田正, 沢木勝茂, 加藤豊：OR 入門-意志決定の基礎-, 実教出版 (1984).

[3] 国沢清典, 宇田川鐘久：オペレーションズリサーチ入門, 広川書店 (1962).

[4] 佐治信男, 白根礼吉, 横井満, 大前義次：オペレーションズリサーチ 理論と実際, 培風館 (1963).