

# 高速道路の料金所における待ち行列の解析

## － ETC を含むゲート数の最適化 －

2001MM040 木附 泰輝

2001MM070 大槻 武司

指導教員 澤木 勝茂

### 1 はじめに

建設省によると、国民1人当たりの交通渋滞による時間の損失は42時間とされている。経済価値にすると国民全体で12兆円の損失になるといわれている。現在、高速道路における交通渋滞の約3割を占めているのが、料金所付近で発生するいわゆる「料金所渋滞」と呼ばれるものである。この「料金所渋滞」を解消することを目的として、ETCが導入された。ETC利用率が上がれば、ETCの方が処理能力が高いので渋滞は緩和するはずである。しかし、ETC専用ゲートを設けている料金所では、ETC利用率が低い場合、一般車両はそのゲートでサービスを受けることが出来ないため、料金所全体の処理能力が低下し逆に渋滞を助長させるという事例が報告されている。平成16年11月現在では、ETCの普及台数は約401万台である。平成13年4月では、約4万台であったのに対し、約3年弱で100倍にまで普及に至った。本研究では、料金所にかかる時間の解消において、手動で料金所を利用する場合とETCを利用した場合についての効果を考える。

### 2 モデルの定式化

本論文で取り扱うサービスの種類は一般専用ゲート、ETC専用ゲートの2つである。ここで、2つのサービスの到着率、サービス率はそれぞれ独立であり、到着時間間隔分布とサービス時間分布は、指数分布に従うポアソン到着、指数サービスである。また、料金所に侵入した車両は一般車両、ETC車両が各1列ずつ並び、空いたゲートに先着順にサービスを受けることができるものとする。よって、 $M/M/s$ 待ち行列が並列に並ぶ合成待ち行列モデルである。

#### 2.1 記号の説明

$\lambda$ : 全体の到着率

$\lambda_1$ : 一般専用ゲートの到着率

$\lambda_2$ : ETC専用ゲートの到着率

$\mu_1$ : 一般専用ゲートのサービス率

$\mu_2$ : ETC専用ゲートのサービス率

$R$ : ETC普及率

$S$ : ゲートの総数

$s_N$ : 一般専用ゲートの数

$s_E$ : ETC専用ゲートの数

$\rho_1$ : 一般専用ゲートの利用率

$\rho_2$ : ETC専用ゲートの利用率

$L_q^{Ni}$ : ゲート数  $i$  の一般専用ゲートにおける待っている車両の平均数

$L_q^{Ej}$ : ゲート数  $j$  のETC専用ゲートにおける待っている車両の平均数

$W_q^{Ni}$ : ゲート数  $i$  の一般専用ゲートの平均待ち時間

$W_q^{Ej}$ : ゲート数  $j$  のETC専用ゲートの平均待ち時間

$L_q^{ij}$ : 一般専用ゲート数  $i$ 、ETC専用ゲート数  $j$  で構成される料金所モデルの総合平均系内数

$W_q^{ij}$ : 一般専用ゲート数  $i$ 、ETC専用ゲート数  $j$  で構成される料金所モデルの総合平均待ち時間

$P_0^{Ni}$ : 一般専用ゲートに車両がない確率

$P_0^{Ej}$ : ETC専用ゲートに車両がない確率

$a_1$ : 一般専用ゲートのトラフィック密度

$a_2$ : ETC専用ゲートのトラフィック密度

$C$ : 総費用

$C_1$ : サービス費用

$C_2$ : 行列費用

$c_N$ : 一般専用ゲート1つを1時間稼働するための費用

$c_E$ : ETC専用ゲート1つを1時間稼働するための費用

$c_w$ : 車両1台を1単位時間行列して待たせる費用

$s_N$ : 一般専用ゲートの数

$s_E$ : ETC専用ゲートの数

#### 2.2 サービス率

本論文でのサービス率は次の値に固定する。

##### 2.2.1 一般専用ゲート

$$\mu_1 = \frac{1}{6.94} = 0.144092$$

##### 2.2.2 ETC専用ゲート

$$\mu_2 = \frac{1}{2.61} = 0.383142$$

#### 2.3 一般専用ゲート

一般専用ゲート数  $i$  における待っている自動車数の平均  $L_q^{Ni}$  と、平均待ち時間  $W_q^{Ni}$  は以下ようになる。

$$L_q^{Ni} = \frac{a_1^{s_N+1}}{(s_N-1)!(s_N-a_1)^2} P_0^{Ni} \quad (1)$$

$$W_q^{Ni} = \frac{1}{\lambda_1} L_q^{Ni} \quad (2)$$

$$= \frac{a_1^{s_N+1}}{\lambda_1 (s_N-1)!(s_N-a_1)^2} P_0^{Ni} \quad (3)$$

$$P_0^{Ni} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_N-1} \frac{a_1^n}{n!} + \frac{a_1^{s_N}}{(s_N-1)!(s_N-a_1)}} \quad (4)$$

## 2.4 ETC 専用ゲート

ETC 専用ゲート数  $j$  における待っている自動車数の平均  $L_q^{Ej}$  と、平均待ち時間  $W_q^{Ej}$  は以下ようになる。

$$L_q^{Ej} = \frac{a_2^{s_E+1}}{(s_E-1)!(s_E-a_2)^2} P_0^{Ej} \quad (5)$$

$$W_q^{Ej} = \frac{1}{\lambda_2} L_q^{Ej} \quad (6)$$

$$= \frac{a_2^{s_E+1}}{\lambda_2(s_E-1)!(s_E-a_2)^2} P_0^{Ej} \quad (7)$$

$$P_0^{Ej} = \frac{1}{\sum_{n=0}^{s_E-1} \frac{a_2^n}{n!} + \frac{a_2^{s_E}}{(s_E-1)!(s_E-a_2)^2}} \quad (8)$$

## 2.5 総合平均系内数・総合平均待ち時間

以上から、一般専用ゲート数  $i$ 、ETC 専用ゲート数  $j$  で構成される料金所モデルの総合平均系内数  $L_q^{ij}$ 、総合平均待ち時間  $W_q^{ij}$  は次のようになる。

$$L_q^{ij} = \frac{\lambda_1 L_q^{Ni} + \lambda_2 L_q^{Ej}}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (9)$$

$$W_q^{ij} = \frac{\lambda_1 W_q^{Ni} + \lambda_2 W_q^{Ej}}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (10)$$

## 3 ETC 普及に伴う最適ゲート数

### 3.1 ETC 普及率 10 %

表 1 ETC 普及率 = 10 %

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\lambda_1$	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.54
$W_q^{N1}$	11.55	-	-	-	-	-
$W_q^{N2}$	0.750	4.439	49.84	-	-	-
$W_q^{N3}$	0.080	0.615	2.384	9.704	-	-
$W_q^{N4}$	0.008	0.106	0.471	1.476	4.449	23.75
$W_q^{N5}$	0.001	0.018	0.104	0.361	0.990	2.554
$W_q^{N6}$	0.000	0.003	0.023	0.094	0.279	0.699
$\lambda_2$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
$W_q^{E1}$	0.070	0.144	0.222	0.304	0.392	0.447
$W_q^{E2}$	0.001	0.002	0.004	0.007	0.011	0.014
$W_q^{E3}$	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001
$W_q^{E4}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$W_q^{E5}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$W_q^{E6}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

#### ・考察

一般ゲートの場合、2 台だと到着率  $\lambda = 0.2$  以上になると飛躍的に  $W_q$  の値が上昇してしまいう。しかし、1 つゲートを増やすだけで、到着率  $\lambda = 0.4$  まで平均待ち時間が  $W_q = 10$  秒以内でできることが容易にわかる。また、ETC ゲートは 1 台設置するだけで平均待ち時間  $W_q = 1$  以下になるので、1 台で十分である。また、料金所が混雑したときには、ETC ゲートを一般に切替え

るだけで、一般ゲートでの平均待ち時間を大きく減らすことができることがわかる。

### 3.2 ETC 普及率 20 %

表 2 ETC 普及率 = 20 %

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\lambda_1$	0.08	0.16	0.24	0.32	0.40	0.48
$W_q^{N1}$	8.663	-	-	-	-	-
$W_q^{N2}$	0.579	3.092	15.71	-	-	-
$W_q^{N3}$	0.057	0.431	1.557	4.923	26.71	-
$W_q^{N4}$	0.005	0.069	0.304	0.908	2.378	6.815
$W_q^{N5}$	0.001	0.011	0.063	0.217	0.575	1.356
$W_q^{N6}$	0.000	0.001	0.012	0.053	0.160	0.385
$\lambda_2$	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10	0.12
$W_q^{E1}$	0.144	0.304	0.485	0.689	0.922	1.190
$W_q^{E2}$	0.002	0.007	0.016	0.029	0.045	0.065
$W_q^{E3}$	0.000	0.001	0.001	0.001	0.002	0.004
$W_q^{E4}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001	0.001
$W_q^{E5}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$W_q^{E6}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

#### ・考察

このときも、ETC ゲートは 1 台でも  $\lambda = 0.6$  以上にならない限り  $W_q$  の値を超えることが無いので、現状では 1 台で十分である。また、ETC 車の増加によって、一般ゲートの利用者数が減ったことにより、ETC 普及率 10 % のときと比べると、料金所渋滞において多大な効果をもたらしたと言える。

### 3.3 ETC 普及率 30 %

表 3 ETC 普及率 = 30 %

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\lambda_1$	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35	0.42
$W_q^{N1}$	6.557	237.4	-	-	-	-
$W_q^{N2}$	0.435	2.144	7.858	117.0	-	-
$W_q^{N3}$	0.039	0.290	0.998	2.746	8.058	77.12
$W_q^{N4}$	0.003	0.042	0.186	0.541	1.309	3.033
$W_q^{N5}$	0.001	0.006	0.035	0.122	0.319	0.717
$W_q^{N6}$	0.000	0.001	0.006	0.027	0.082	0.199
$\lambda_2$	0.03	0.06	0.09	0.12	0.15	0.18
$W_q^{E1}$	0.222	0.485	0.801	1.190	1.679	2.313
$W_q^{E2}$	0.004	0.016	0.004	0.066	0.104	0.152
$W_q^{E3}$	0.000	0.001	0.002	0.004	0.008	0.013
$W_q^{E4}$	0.000	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001
$W_q^{E5}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
$W_q^{E6}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

#### ・考察

ETC 普及率が 30 % になると  $\lambda = 0.4$  以上になると平均

待ち時間  $W_q > 1$  になってしまう。よって、2台設置すれば ETC車はスムーズに料金所を通過することができる。しかし、ETCゲートを設置するよりは一般ゲートを設置した方が、平均待ち時間  $W_q$  の値を大幅に改善することができ、ETC普及率 30%のときは、ETCゲートは1つで十分であることがわかる。

### 3.4 ETC普及率 40%

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\lambda_1$	0.06	0.12	0.18	0.24	0.30	0.36
$W_q^{N1}$	4.951	34.57	-	-	-	-
$W_q^{N1}$	0.314	1.456	4.439	15.71	-	-
$W_q^{N1}$	0.025	0.185	0.615	1.557	3.656	9.704
$W_q^{N1}$	0.002	0.024	0.106	0.304	0.704	1.476
$W_q^{N1}$	0.001	0.003	0.018	0.063	0.164	0.361
$W_q^{N1}$	0.000	0.001	0.003	0.012	0.038	0.094
$\lambda_2$	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24
$W_q^{N1}$	0.304	0.689	1.190	1.871	2.850	4.376
$W_q^{N1}$	0.007	0.029	0.066	0.119	0.191	0.284
$W_q^{N1}$	0.001	0.001	0.004	0.009	0.018	0.030
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.001	0.001	0.002	0.003
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

#### ・考察

ここまで ETC が普及してくると、かなり料金所での渋滞は解消できることがわかる。普及率 10%のときと比べてみると、一般ゲートに関しては3つ以上ゲートを作れば到着率  $\lambda = 0.6$  以上にならなければ料金所での渋滞は改善されているといえる。また、ETCゲートは2台設置すれば平均待ち時間  $W_q < 1$  となり料金所での渋滞はまず無いといえる。よって、一般ゲート3台、ETCゲート2台を設置しておけば、料金所での渋滞は大幅に改善でき、ETC普及による効果が顕著に現れてきたといえる。

### 3.5 ETC普及率 50%

#### ・考察

一般に ETC 普及率が 50%を超えると料金所での渋滞は解決されると言われている。実際に数値結果を比べた結果、ETCゲートは ETC普及率 40%のときと同様に2台設置すれば何ら問題なく解消できる。また、一般ゲートの方でも、到着率  $\lambda = 0.4$  以内であれば2台で対応でき、とても混雑が予想される料金所でも3台設置すれば平均待ち時間  $W_q < 10$  となり、料金所での渋滞は解決できたと言えるだろう。普及率が 30%を超えた当たりから、飛躍的に料金所での渋滞が解決されて来たことが分かる。

## 4 実データを用いた解析

用いるデータは以下の通りである。

$\lambda$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6
$\lambda_1$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$W_q^{N1}$	3.688	15.74	-	-	-	-
$W_q^{N1}$	0.215	0.950	2.579	6.448	21.11	-
$W_q^{N1}$	0.015	0.109	0.355	0.854	1.796	3.656
$W_q^{N1}$	0.001	0.012	0.055	0.156	0.354	0.704
$W_q^{N1}$	0.000	0.001	0.028	0.028	0.075	0.164
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.005	0.005	0.015	0.038
$\lambda_2$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$W_q^{N1}$	0.392	0.922	1.679	2.850	4.901	9.418
$W_q^{N1}$	0.011	0.045	0.104	0.191	0.311	0.472
$W_q^{N1}$	0.001	0.002	0.008	0.018	0.034	0.058
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.004	0.007
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.001
$W_q^{N1}$	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

### 4.1 費用について

#### 4.2 定式化

全節で説明したサービス費用、行列費用を式で表すと、以下のようになる。

総費用は、

$$C = c_N s_N + c_E s_E + c_w L_q^{ij} \quad (11)$$

となる。

### 4.3 費用の設定

ゲート1つ当たりの稼働費用と、車両1台1単位時間当たりの待ち時間の具体的な数値を決定する。

費用の設定は、数値結果を出した時に比較ができるように4つのパターンを考える。また、4つの費用パターンは、数値結果での違いを分かりやすくするために、多少極端な値に決定する。

#### 4.3.1 費用パターン

$$c_N = 100, c_E = 10, c_w = 200$$

## 5 数値解析結果

$$c_N = 100, c_E = 10, c_w = 200$$

### 5.0.2 モデル1を選択する時刻

7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 20

### 5.0.3 モデル2を選択する時刻

15, 19

### 5.0.4 モデル3を選択する時刻

16, 17, 18

### 5.0.5 モデル4を選択する時刻

6, 21, 22

### 5.0.6 モデル5を選択する時刻

0, 1, 2, 3, 4, 5, 23

表 4 到着台数と到着率

時刻	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda$	ETC
0	0.0665	0.0347	0.1013	34.3
1	0.0619	0.0365	0.0985	37.1
2	0.0638	0.0406	0.1043	38.9
3	0.0675	0.0425	0.1100	38.6
4	0.0594	0.0363	0.0957	37.9
5	0.0624	0.0306	0.0929	32.9
6	0.1078	0.0508	0.1586	32.0
7	0.1953	0.0685	0.2638	26.0
8	0.2129	0.0704	0.2833	24.9
9	0.1939	0.0688	0.2626	26.2
10	0.1986	0.0713	0.2699	26.4
11	0.2139	0.0711	0.2850	25.0
12	0.2118	0.0736	0.2854	25.8
13	0.2299	0.0807	0.3106	26.0
14	0.2658	0.0883	0.3542	24.9
15	0.3428	0.1107	0.4535	24.4
16	0.4172	0.1276	0.5449	23.4
17	0.4182	0.1254	0.5436	23.1
18	0.3906	0.1104	0.5010	22.0
19	0.3024	0.0929	0.3953	23.5
20	0.1872	0.0638	0.2510	25.4
21	0.1394	0.0549	0.1943	28.2
22	0.1042	0.0422	0.1464	28.8
23	0.0794	0.0353	0.1147	30.8

表 5 パターン 1

時刻	モデル 1	モデル 2	モデル 3	モデル 4	モデル 5
0	340.29	430.02	520.01	243.42	192.09
1	340.21	430.02	520.02	242.62	180.8
2	340.23	430.02	520.02	243.78	182.86
3	340.29	430.02	520.03	243.35	190.78
4	340.18	430.01	520.02	242.28	175.96
5	340.23	430.02	520.01	242.85	184.27
6	341.98	430.24	520.06	256.58	442.89
7	362.86	434.13	520.81	410.01	—
8	373.27	436.25	521.27	505.69	—
9	362.13	433.98	520.79	403.89	—
10	364.45	434.45	520.89	423.71	—
11	373.89	436.38	521.3	512.11	—
12	372.23	436.04	521.24	496	—
13	385.7	438.83	521.9	652.66	—
14	430.03	447.81	524.07	1836.1	—
15	708.67	492.28	535.43	—	—
16	4359.9	617.84	535.04	—	—
17	4574.2	620.34	565.56	—	—
18	1550.7	559.82	551.86	—	—
19	515.17	463.63	528.03	—	—
20	359.42	433.43	520.65	381.65	—
21	345.74	430.74	520.16	282.55	4370.5
22	341.82	430.21	520.04	255.51	409.42
23	340.61	430.06	520.02	246.26	233.5

## 5.1 考察

到着率の値が上昇するにつれ総費用の値も大きくなる、さらに、最適なモデルが、サービス費用の値の大きなモデルへと移行していくということである。1時～6時の、到着率が低く、ETC普及率の高い時間帯ではサービス費用が低く、ETCゲートの占める割合の高い料金所モデル、つまりモデル1が最適なモデルとして選択される。

7時～14時の、到着率、ETC普及率が共に平均的な値をとる時間帯では、モデル1が最適モデルである。モデル1は、15時～19時の時間帯以外において安定して低い費用の値をとっている。

16時～18時の、1日の中で最も到着率が高く、ETC普及率が低い時間帯では、モデル3が最適なモデルである。モデル3は一般車用ゲートが6個と最大であることから、最もサービス費用の値が高いモデルである、しかし、行列モデルの値が低いことにより、最適モデルとなっている。

## 6 おわりに

日常よく経験している待ち行列を題材に選んだので、自分達なりの結果が予想でき、スムーズに進行できると考えていた。しかし、私達の予想は到着率の増加に対し

て単に窓口を増やすことで対応することができるであろうという安易なものであったので、予想に反する解析結果を前にして、驚きは大きかった。

本論文において最適化したモデルと、実際の料金所でのゲートの切替えには若干の違いがあるが、それはETC車の利便性を強調したための結果である。

本論文で用いた  $M/M/s$  待ち行列が並列に並んでいるモデルは日常生活の様々な場所で見掛けることが沢山あるだろうが、そのときには、四苦八苦しながら完成させたこの論文を思い出さよう。

## 参考文献

- [1] 小和田正, 澤木勝茂, 加藤豊: OR 入門-意志決定の基礎-, 実況出版 (1984).
- [2] 森村英典, 大前義次: 応用待ち行列理論, 日科技連出版社 (1975).
- [3] 尾崎俊治: 確率モデル入門, 朝倉書店 (1996).
- [4] 森村英典, 大前義次: 待ち行列理論と実際, 日科技連出版社 (1962).
- [5] 牧本直樹: 待ち行列アルゴリズム-行列解析アプローチ-, 朝倉書店 (2001).