いろいろな効用関数の下でのポートフォリオ選択問題

2001MM018 稲生 裕子

指導教員　澤木 勝茂

1 はじめに

低金利時代の到来やペイオフの導入などにより、これからは自己責任において、自分の資産を守っていかなければならないと言うことができる。このような時代を背景に、安全性や収益性のバランスを考慮に入れた効率的な資産配分が今後ますます求められてくるのではないかと考え、卒業論文のテーマとして取り組むことにした。

2 モデルの設定

本論文では、確率過程が対数ウィナー過程に従う場合を考察した後で、より一般的なセミマーチンゲールに拡張した場合を考える。i 番目の資産 i について次の記号を使用する。$(i = 1, 2, ..., n)$

- $X_i(t-)$：時刻 t での資産 i の価格 (左からの極限)
- $a_i(t)$：資産 i の収益率の平均パラメータ
- $b_i(t)$：資産 i の収益率の分散パラメータ
- $N_{ik}(t)$：時間 $[0, t]$ の間で起こった k 番目のジャンプの回数
- β_{ik}：価格変化の幅 (資産 i の k 番目のジャンプ幅)
- $Z_i(t)$：対数ウィナー過程 (幾何ブラウン運動)

$$\frac{dX_i(t)}{X_i(t-)} = a_i(t)dt + b_i(t)dZ_i(t) + \sum_{k=-m}^{m} \beta_{ik} dN_{ik}(t) \quad (1)$$

3 定式化

- $W(t)$：時刻 t で投資家が所有する富
- $y_i(t)$：資産 i への投資比率

$$y_i(t) = \frac{X_i(t-)N_i(t)}{W(t-)} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} y_i(t) = 1 \quad (2)$$

- $C(t)$：単位時間当たりの消費率
- $u(C(t), t)$：時刻 t での効用関数
- $B(W(T))$：期末での遺産効用関数

$N_{ik}(t)$ はマーチンゲール $M_{ik}(t)$ と増加過程との和に分解されると仮定し、λ_{ik} を以下のように解釈する。

$$N_{ik}(t) = M_{ik}(t) + \int_0^t \lambda_{ik}(s)ds \quad (3)$$

$$\lambda_{ik}(t)dt = P[dN_{ik}(t) = 1]$$

(3) 式を用いて (1) 式を書き換え、富の変化を以下に示す。

$$dW(t) = \sum_{i=1}^{n} N_i(t)dX_i(t) - C(t)dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[y_i(t)W(t-) \left(a_i + \sum_{k=-m}^{m} \beta_{ik}\lambda_{ik}(t) \right) - C(t) \right] dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t-)b_i dZ_i(t)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t-) \sum_{k=-m}^{m} \beta_{ik} dM_{ik}(t)$$

上記の富の確率過程と制約条件下で投資家の期待効用

$$\sup_{C(t),y(t)} E\left[\int_0^T u(C(t), t)dt + B(W(T)) \right]$$

を最大にする最適資産配分と最適消費計画を求めていくとする。

4 最適方程式の導出

最大期待効用 $V(\cdot)$ を以下で定義する。

$$V(w, t) = \sup_{C(\tau),y(\tau),t\le\tau\le T} E\left[\int_t^T u(C(\tau), \tau)d\tau + B(W(T)) | W(t) = w \right]$$

関数 $V(w, t)$ の時間に関する変化率を考えるために、確率過程 $W(t)$ の微分作用素 D_w を用いると最適方程式は以下のように表される。

$$\sup_{C(t),y(t)} \{D_w V[w, t] + u(C(t), t)\} = 0 \quad (4)$$

また、資産価格の確率過程からジャンプの項を除去して $\beta_{ik} = 0$ とすると $D_{wx}[V]$ は以下のように表される。

$$D_{wx}[V] =$$

$$V_t + V_w \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)a_i - C(t) \right) + \frac{1}{2} V_{ww} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i(t)W(t)b_i \right)^2$$

5 最適ポートフォリオの導出

最適ポートフォリオの明示的な解を求めるために、効用関数と遺産関数を特定化していく。本論文では、以下の 4 つの効用関数について考える。

(1)$u(C(t), t) = \log C(t), B(W(T)) = \log W(T)$

(2)$u(C(t), t) = \sqrt{C(t)}, B(W(T)) = \sqrt{W(T)}$

(3)$u(C(t), t) = [C(t)]^2, B(W(T)) = [W(T)]^2$

(4)$u(C(t), t) = 1 - e^{-\alpha C(t)}, B(W(T)) = 1 - e^{-\alpha W(T)}$

境界条件 $V(W, T) = B(W)$ と資産配分の制約条件 $\sum_{i=1}^{n} y_i(t) = 1$ の下で最適化問題を解くために、ラグランジュ関数 L を

$$L(y(t), C(t), \lambda) = f(y(t), C(t)) + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) \right)$$

とおくと、1 階の最適性の条件より、次の等式を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial y_i(t)} = V_w \cdot W(t)a_i + V_{ww}W(t)^2 y_i(t)b_i^2 - \lambda = 0 \quad (5)$$

(ただし、(5) 式は $i = 1, 2, ..., n$ である。)

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 1 - \sum_{i=1}^{n} y_i(t) = 0 \qquad (6)$$

(5)、(6) 式を用いると最適ポートフォリオ $y_i(t)$ は以下のように表される。

$$y_i(t) = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} + \frac{V_w}{V_{ww}W(t)} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} - \frac{V_w}{V_{ww}W(t)} \cdot \frac{a_i}{b_i^2}$$

$\frac{V_w}{V_{ww}W(t)}$ を計算すると、最適ポートフォリオ $y_i(t)$ を示す式は以下のように書き換えることができる。

$$(1)\ y_i(t) = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} - \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} + \frac{a_i}{b_i^2}$$

$$(2)\ y_i(t) = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} - 2 \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} + 2 \cdot \frac{a_i}{b_i^2}$$

$$(3)\ y_i(t) = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} + \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} - \frac{a_i}{b_i^2}$$

$$(4)\ y_i(t) = \frac{b_i^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} - \frac{1}{\alpha W} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j b_j^{-2}}{b_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^{-2}} + \frac{1}{\alpha W} \cdot \frac{a_i}{b_i^2}$$

(1)〜(3) 式は、a_i,b_i を代入すれば、最適ポートフォリオの明示的な解がわかる。しかし、(4) 式は α, a_i, b_i を代入しても W が残るので、W だけが残った状態 (1 次関数の状態) からグラフ等を利用して考察した。

6 実証結果と考察

5 節で得た最適ポートフォリオの式に、月間収益率 (東証第一部 28 業種) から計算した"平均と標準偏差"を代入し、1 年ごとの最適資産配分を求める。本論文では、2000 年から 2003 年の 4 年間のデータを使用し、それぞれ考察した。※ここでは 2003 年度の考察のみ載せた。

6.1 実証結果

(1)〜(3) の各効用関数における、業種別の「最適ポートフォリオと時価総額の構成比 (%)」を右の表 **1** に示す。また、効用関数別に、各業種別時価総額の構成比 (%) とポートフォリオの差の絶対値の総和を右の表 **2** に示す。

6.2 考察

[2003 年]

実際の投資状況：

海外・国内の双要因の作用により、ほぼ全業種が買いに転じている。IT 市況の回復に伴うアジア向け輸出の急増や、アメリカ向け輸出の回復などの海外要因により高利益を上げた 11. 鉄鋼、23. 海運業への投資が強い。

最適ポートフォリオ：

モデルでは、かなりの高リスクのために 11. 鉄鋼、23. 海運業への投資は弱かった。(1),(2) の投資家では、リスクもやや低くリターンもやや高めの 5. 繊維製品への投資が一番強いという結果になった。5. 繊維製品よりもリスクが多少高くなるが、ある程度高いリターンを見込める 10. ガラス・土石製品、14. 機械、17. 精密機器、20. 金融・保険業、25. 倉庫・運輸関連業への投資も強い。

表 1 最適ポートフォリオと時価総額の %＜2003 年＞

第一部 28 業種	$\log C(t)$	$\sqrt{C}(t)$	$C(t)^2$	時価総額
1. 水産. 農林業	-0.07602	-0.21686	0.20566	0.00102
2. 鉱業	0.031623	0.046894	0.001079	0.00082
3. 建設業	0.037575	0.058349	-0.00397	0.02054
4. 食料品	0.068547	-0.02027	0.24619	0.026936
5. 繊維製品	0.108395	0.17989	-0.03459	0.010599
6. パルプ. 紙	0.026128	0.034272	0.00984	0.005893
7. 化学工業	0.028376	-0.04303	0.171195	0.105986
8. 石油. 石炭	0.019946	0.020721	0.018395	0.007318
9. ゴム製品	-0.00866	-0.05169	0.077411	0.006855
10. ガラス. 土石	0.073563	0.124892	-0.0291	0.009891
11. 鉄鋼	0.052146	0.096609	-0.03678	0.015643
12. 非鉄金属	0.039726	0.069841	-0.0205	0.008545
13. 金属製品	0.046171	0.068469	0.001576	0.00631
14. 機械	0.06895	0.114537	-0.02222	0.033938
15. 電気製品	0.038302	0.053324	0.008257	0.153035
16. 輸送用機器	0.044943	0.055358	0.024113	0.107191
17. 精密機器	0.09168	0.149279	-0.02352	0.013298
18. その他製品	0.020237	-0.00197	0.064646	0.019395
19. 商業	0.052566	0.071199	0.015301	0.079757
20. 金融. 保険業	0.062491	0.108729	-0.02998	0.139285
21. 不動産業	0.037949	0.062541	-0.01124	0.011265
22. 陸運業	-0.03581	-0.14982	0.192208	0.040002
23. 海運業	0.046477	0.085791	-0.03224	0.004706
24. 空運業	0.014059	0.011266	0.019646	0.003511
25. 倉庫. 運輸業	0.076504	0.122711	-0.01591	0.001833
26. 情報. 通信業	0.02638	0.023545	0.032049	0.092215
27. 電気. ガス業	-0.01543	-0.09568	0.145067	0.046651
28. サービス業	0.023212	0.021103	0.027429	0.027561

表 2 時価総額の % とポートフォリオの差の絶対値の総和

効用関数	$\log C(t)$	$\sqrt{C}(t)$	$C(t)^2$
2000 年	1.880855	2.804634	0.978383
2001 年	1.442122	2.097986	1.032249
2002 年	1.276142	1.845857	1.046318
2003 年	1.318444	2.239802	1.773887

◎考察から、全体として実際の投資家の動きと最適ポートフォリオは類似していることが分かった。また、2000 年〜2002 年の投資家は危険愛好的 (効用関数 $C(t)^2$) な傾向が見られ、危険回避的傾向が年々強まっていたため 2003 年の投資家は危険回避的 (効用関数 $\log C(t)$) な傾向があると言える。

参考文献

[1] 沢木 勝茂 著、ファイナンスの数理、朝倉書店、1994 年