コンビニエンスストアのレジにおける待ち行列

2001MM016 池田 隼士
指導教員　澤木 勝茂

1　はじめに

生活の中で, サービスを受けるために人々が行列をつくるのはよく見かける. そこで，現在多くの人々の生活に密着していると言えるコンビニエンスストアのレジの待ち行列を考えたい.
本論ではモデルを 4 つ設定し, モデル 1,2, については鞍替えをする場合としない場合ではどちらの方がより効率よくサービスできるか. モデル 3 では, 一列に並び空いた方に入るモデル. モデル 4 は, 窓口に並べる人数を設定しそれ以降は空いた方に入るとする. 全てのモデルでどのモデルが一番効率的かを考察する.

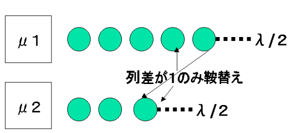
2　モデルの設定

2.1　モデル 1 鞍替えの起こらない場合

両窓口ともサービス中の時，到着した客は短い方の列に並び, 二つの列の長さが同じときはいずれかの列を等しい確率で選ぶ. いずれか一方の窓口が空いているときは, 空いている窓口に並ぶ. 両窓口とも空いている時は, いずれかの窓口を等しい確率で選ぶ. 各窓口の到着率 $\frac{\lambda}{2}$, サービス率 μ_1, μ_2 である M/M/1 の並列の場合と等しい.

2.2　モデル 2 瞬間的鞍替え

両窓口ともサービス中の時, 到着した客は短い方の列に並び, 二つの列の長さが同じときはいずれかの列を等しい確率で選ぶ. いずれか一方の窓口が空いているときは, 空いている窓口に並ぶ. 両窓口とも空いている時は, いずれかの窓口を等しい確率で選ぶ. 待ち行列の長さの差が 1 より大きくなった時は, いつでも長い方の列の最後の客はただちに短い方の待ち行列に鞍替えする. この場合がコンビニエンスストアでよく見かける光景である. コンビニエンスストアの M/M/1 モデルで鞍替えが起こりうる列の差は 1 しか考えられない. それ以上の鞍替えは割込みに等しいので客からの不満がでてしまうからである. 各窓口到着率 $\frac{\lambda}{2}$, サービス率 μ_1, μ_2 である. システムは以下のようになる.

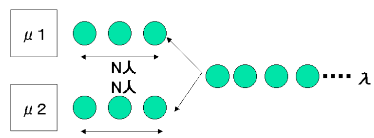


2.3　モデル 3 1 列に並ぶ場合

両窓口ともサービス中の時, 到着した客はその後ろに一列に並び, いずれか一方の窓口が空いているときは, 空いている窓口に並ぶ. 両窓口とも空いている時は, いずれかの窓口を等しい確率で選ぶ. 到着率 λ, モデルは M/M/2 に似ているが μ_1 と μ_2 が違う.

2.4　モデル 4 M/M/1(N) とモデル 3 の混合の場合

両窓口ともサービス中の時, 到着した客は短い方の列に並び, 二つの列の長さが同じときはいずれかの列を等しい確率で選ぶ. いずれか一方の窓口が空いているときは, 空いている窓口に並ぶ. 両窓口とも空いている時は, いずれかの窓口を等しい確率で選ぶ. ここでのモデルは, 朝, 昼, 夕のラッシュ時のモデルである.2 つの窓口に並べる客は限りがありそれ以降は 1 列に並んでいる状態である.1 列に並んだ客は 2 つの窓口の空いた方に入るとする. よってこのモデルは,M/M/1(N) の並列の場合とモデル 3 が合わさったモデルである. システムは以下のようになる.



3　記号の説明

λ ：平均到着率
μ_1, μ_2 : 平均サービス率
ρ ：窓口利用率
L : 系内にいる平均客数
L_q:待ち行列の平均の長さ
L_{qi}:列 i の待ち行列の平均の長さ
W_i:列 i の平均滞在時間
W_q:平均待ち時間

4　問題の定式化

これより各モデルの待っている客の平均数, 平均待ち時間を示す.

4.1　モデル 1 鞍替えの起こらない場合

待っている客の平均数は,
$L_{q1} = \frac{\rho_1^2}{1-\rho_1}$
$L_{q2} = \frac{\rho_2^2}{1-\rho_2}$
となる.
平均待ち時間は, $W_{q1} = \frac{L_{q1}}{\lambda}$
$= \frac{\rho_1^2}{\lambda(1-\rho_1)}$
$W_{q2} = \frac{L_{q2}}{\lambda}$
$= \frac{\rho_2^2}{\lambda(1-\rho_2)}$

4.2　モデル 2 瞬間的鞍替え

系内での平均客数 L_1, L_2 は,

$$L_1 = \frac{\lambda\rho\ [\mu_2(\rho^3-\rho^2+2\rho+2)+\mu_1\rho\ (2+3\rho-\rho^2)]}{2(1+\rho)(1+\rho^2)(\lambda^2+2\mu_1\mu_2(1-\rho))}$$

$$L_2 = \frac{\lambda\rho\ [\mu_1(\rho^3-\rho^2+2\rho+2)+\mu_2\rho\ (2+3\rho-\rho^2)]}{2(1+\rho)(1+\rho^2)(\lambda^2+2\mu_1\mu_2(1-\rho))}$$

である. 待っている客の平均数 L_{q1}, L_{q2} は,

$$L_{q1} = L_1 + \rho$$

$$L_{q2} = L_2 + \rho$$

である. 平均待ち時間 W_{q1}, W_{q2} は,

$$W_{q1} = \frac{L_1+\rho}{\lambda}$$

$$W_{q2} = \frac{L_2+\rho}{\lambda}$$

である.

4.3　モデル 3 一列に並ぶ場合

$\rho_1 = \frac{\lambda}{2\mu_1}, \rho_2 = \frac{\lambda}{2\mu_2}, \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_1+\rho_2} = R$

とおくと,

待っている客の平均数 $L_{q3'}$ は,

$$L_{q3'} = \sum_{n=1}^{\infty} nR^n$$

$$= \frac{R}{(1-R)^2}$$

である.

平均待ち時間 $W_{q3'}$ は,

$$W_{q3'} = \frac{L_q}{\lambda}$$

$$= \frac{R}{\lambda(1-R)^2}$$

となる.

4.4　モデル 4 M/M/1(N) とモデル 3 の混合の場合

待っている客の平均数 L_{q4} は,

$$L_{q4} = (1-1)P_1 + (2-1)P_2 + \cdots + (N-1)P_N$$

$$= P_2 + 2P_3 + 3P_4 + \cdots + (N-1)P_N$$

$$= [\rho^2 + 2\rho^3 + 3\rho^4 + \cdots + (N-1)\rho^N]P_0$$

$$= \frac{\rho^2 - N\rho^{N+1} + (N-1)\rho^{N+2}}{(1-\rho)^2}P_0$$

となる.

平均待ち時間は W_{q4} は,

$L_q = \lambda W_q$ より

$$W_{q4} = \frac{1}{\lambda}L_{q4}$$

となる. また,

$$L_{q4-1} + L_{q3} = L_{q5-1}$$

$$L_{q4-2} + L_{q3} = L_{q5-2}$$

とする.

5　考察

モデル 1 からモデル 4 のどのモデルも到着率の値を増加させていくと, 平均系内数, 待っている客の平均数, 平均待ち時間共に増加していることがわかった. よって到着率をあげると客の流れがよくなり下げると効率よく受けられることになる. $\mu_1+\mu_2$ の和は一定であるので, 待ている客の平均数, 平均待ち時間は 2 つの列のサービス率の差によって決まるので, サービス率の差が大きければサービスに時間のかかる方の列に並んでいる客は長い間待たされることになる. よって早く済ましたい客はサービス率の大きい方並ぶとよいがしかしモデル 4 にいたっては列を選ぶことができないのが良くない点だ. モデル 2 は 2 つの列の差が 1 のみに鞍替えが起こる. よってモデル 1 に比べ L_{q2-1} と L_{q2-2} の差はほとんど変わりがないことがわかる. モデル 3 は一番効率が良かったがサービス率の差が開くほど効率が悪い. モデル 4 では M/M/1(N) とモデル 3 の混合によりモデル 3 よりは効率は良くないがモデル 1,2 よりは効率がよくなった.

6　数値結果

表 1　モデル 4 M/M/1(N)+ モデル 3

λ_1	λ_2	$N-1$	μ_1	μ_2	L_{q5-1}	L_{q5-2}
9	11	5	15	18	1.2573	1.2573
9	11	4	15	18	1.1435	1.1435
9	11	3	15	18	0.9953	0.9953
9	11	2	15	18	0.815	0.815
9.9	12.1	5	15	18	1.516	1.516
9.9	12.1	4	15	18	1.3587	1.3587
9.9	12.1	3	15	18	1.1687	1.1687
9.9	12.1	2	15	18	0.9526	0.9526
10.8	13.2	5	15	18	1.8287	1.8287
10.8	13.2	4	15	18	1.6221	1.6221
10.8	13.2	3	15	18	1.3874	1.3874
10.8	13.2	2	15	18	1.1347	1.1347
11.7	14.3	5	15	18	2.1583	2.1583
11.7	14.3	4	15	18	1.8981	1.8981
11.7	14.3	3	15	18	1.6169	1.6169
11.7	14.3	2	15	18	1.3276	1.3276
12.6	15.4	5	15	18	3.0266	3.0266
12.6	15.4	4	15	18	2.2103	2.2103
12.6	15.4	3	15	18	1.9421	1.9428
12.6	15.4	2	15	18	1.5567	1.5567

7　おわりに

各モデルの数値計算をしてきた結果モデル 3 が一番効率がよいことがわかる. しかし, このモデルはコンビニエンスストアの広さや物の設置場所から考えると買物をしている客に大変迷惑がかかってしまう. そのことを考えるとモデル 4 がコンビニエンスストアの狭い場所にも適しておりモデル 1 モデル 2 より効率がよいことからモデル 4 が一番効率がよいモデルだと言えるだろう. この卒業研究をするにあたって苦労したのは, モデル 2 とモデル 3,4 の定式化, そして数値計算である. また時間が許せばモデル 4 をシュミレーションを用いて実際の値と比べていきたいと思っている.

謝辞

本論文を作成するにあたり,2 年間数理科学習を通して御指導していたただきました澤木 勝茂教授に深く感謝いたします.

参考文献

[1] 高橋敬隆, 山本尚生, 吉野秀明, 戸田彰：わかりやすい待ち行列システム－理論と実践－, 社団法人電子情報通信学会 (2003).

[2] 大石進一：待ち行列理論, コロナ社 (2003).

[3] 桐山光弘：待ち行列がわかる本, 日刊工業新聞社 (1997)

[4] 森雅俊：スーパーの食品売場のレジにおける待ち行列の解析, 2003 年度南山大学数理情報学部数理科学科卒業論文集 (2004,3)