命題計算における証明可能な論証形式と反証図

2001MM054 丹羽 鋼司
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

本研究では、John Nolt and Dennis Rohatyn[1] でとりあげられている命題計算における証明可能な論証形式と反証図について研究する。[1] では、論理式と論証形式を定義し、次に論証形式に対して、証明可能性、妥当性、および、反証図を直観的に説明し、多くの具体例をあげている。さらに、3 つの概念の同等性についても述べているが、その証明は省略されている。ここでは、3 つの概念を帰納法を用いてきちんとした形で定義し、同等性の証明を与える。

2　論理式と論証形式

定義 2.1 論理式を次のように定義する。

(1) どの文記号も論理式である。

(2) もし A が論理式であれば、$\neg A$ も論理式である。

(3) もし A と B が論理式であれば、$(A \wedge B)$,$(A \vee B)$,$(A \rightarrow B)$,$(A \leftrightarrow B)$ もそれぞれ論理式である。

ただし、論理式の一番外側の () は便宜的に省略してもよい。

以下では、文記号を表すために、P, Q などを用い、論理式を表すために A, B などを用いる。

定義 2.2 論理式の集合を $\mathbf{S}$ とするとき、$\mathbf{S} \vdash A$ を論証形式という。

ここで論証形式 $\mathbf{S} \vdash A$ は「$\mathbf{S}$ の中の論理式を仮定として A が証明可能である」ことを意味する。[1] に従って、$\mathbf{S} \cup \{A_1, \cdots, A_n\} \vdash B$ を簡単に $\mathbf{S}, A_1, \cdots, A_n \vdash B$ とも表す。論証形式 $\mathbf{S} \vdash A$ において、$\mathbf{S}$ の要素をこの論証形式の前提、A を帰結という。

3　証明可能な論証形式

ここでは [1] で述べられた論証形式の証明可能性を、きちんとした形で帰納的に定義する。この帰納的定義は [1] では述べられていない。

定義 3.1 論証形式 $\mathbf{S} \vdash A$ が証明可能であることを次のように定義する。

1. $A \in \mathbf{S}$ のとき $\mathbf{S} \vdash A$ は証明可能である。(Asp)
2. (a) $\mathbf{S} \vdash A$ かつ $\mathbf{S} \vdash B$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash A \wedge B$ が証明可能である。($\wedge I$)
   (b) $\mathbf{S} \vdash A$ かつ $\mathbf{S} \vdash A \rightarrow B$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash B$ が証明可能である。(MP)
   (c) i. $\mathbf{S} \vdash A \wedge B$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash A$ が証明可能である。($\wedge E$)
   ii. $\mathbf{S} \vdash A \wedge B$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash B$ が証明可能である。($\wedge E$)
   (d) $\mathbf{S} \vdash \neg\neg A$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash A$ が証明可能である。($\neg E$)
   (e) (a) の ($\wedge I$) および (c) の ($\wedge E$) と同様に、($\vee I$) および ($\vee E$)、($\leftrightarrow I$) および ($\leftrightarrow E$) も規定する。
3. (a) (仮説 A をたてて) $\mathbf{S}, A \vdash B$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash A \rightarrow B$ が証明可能である。(CP)
   (b) (仮説 A をたてて) $\mathbf{S}, A \vdash B \wedge \neg B$ が証明可能ならば $\mathbf{S} \vdash \neg A$ が証明可能である。(RAA)

4　妥当な論証形式

[1] では、論証形式の妥当性を真理値表を用いて定義しているが、ここでは、小野 [2] に従って、付値関数を用いて定義する。

定義 4.1 論理式の集合から $\{T,F\}$ への写像で次の条件をみたすものを付値という。

(1)$v(\neg A) = T \Leftrightarrow v(A) = F$

(2)$v(A \wedge B) = T \Leftrightarrow v(A) = v(B) = T$

(3)$v(A \vee B) = T \Leftrightarrow v(A) = T$ または $v(B) = T$

(4)$v(A \rightarrow B) = T \Leftrightarrow v(A) = F$ または $v(B) = T$

(5)$v(A \leftrightarrow B) = T \Leftrightarrow v(A) = v(B) = T$ または $v(A) = v(B) = F$

任意の付値 v に対して、v が論証形式の前提のすべての論理式を「T」とするならば帰結の論理式も「T」とするとき、この論証形式は妥当であるという。

5　反証図

[1] では、反証図を具体例を示すことによって説明しており、そのきちんとした定義は与えられていない。ここでは、反証図をきちんとした形で帰納的に定義する。この帰納的定義は [1] では述べられていない。またここでは、[1] における閉じた経路に対応する概念として、“末端の論理式” を導入する。完全反証図という概念も、[1] で述べられていないが、本研究の目的である 3 つの概念の同等性を示すために、ここで導入する。

定義 5.1 論証形式 $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図およびその末端の論理式を次のように定義する。

1. 次の図は $A_1, \cdots, A_n \vdash B$ の反証図である。

$$\begin{array}{l} A_1 \\ \vdots \\ A_n \\ \neg B \end{array}$$

一番下に現れる $\neg B$ をこの反証図の末端の論理式という。

2. $(\wedge)$　$\mathcal{P}$ が $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図で、$\mathcal{P}$ に $\surd$ のない $B \wedge C$ が出現するとき、次によって得られる図 $\mathcal{Q}$ も $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図である。
・$\mathcal{P}$ において $B \wedge C$ のその出現の下にあるすべての末端の論理式の下に
B
C
を加える。
・$B \wedge C$ のその出現に $\surd$ をつける。
$\mathcal{Q}$ において、新しく加えられた
B
C
の C を $\mathcal{Q}$ の末端の論理式という。
3. $(\vee)$　$\mathcal{P}$ が $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図で、$\mathcal{P}$ に $\surd$ のない $B \vee C$ が出現するとき、次によって得られる図 $\mathcal{Q}$ も $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図である。
・$\mathcal{P}$ において $B \vee C$ のその出現の下にあるすべての末端の論理式の下に
/　　\
B　　C
を加える。
・$B \vee C$ のその出現に $\surd$ をつける。
$\mathcal{Q}$ において、新しく加えられた
/　　\
B　　C
の B と C を $\mathcal{Q}$ の末端の論理式という。
4. $(\neg\wedge)$　$\mathcal{P}$ が $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図で、$\mathcal{P}$ に $\surd$ のない $\neg(B \wedge C)$ が出現するとき、次によって得られる図 $\mathcal{Q}$ も $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図である。
・$\mathcal{P}$ において $\neg(B \wedge C)$ のその出現の下にあるすべての末端の論理式の下に
/　　\
$\neg B$　　$\neg C$
を加える。
・$\neg(B \wedge C)$ のその出現に $\surd$ をつける。
$\mathcal{Q}$ において、新しく加えられた
/　　\
$\neg B$　　$\neg C$
の $\neg B$ と $\neg C$ を $\mathcal{Q}$ の末端の論理式という。
5. $(\neg\vee)$　$\mathcal{P}$ が $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図で、$\mathcal{P}$ に $\surd$ のない $\neg(B \vee C)$ が出現するとき、次によって得られる図 $\mathcal{Q}$ も $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図である。
・$\mathcal{P}$ において $\neg(B \vee C)$ のその出現の下にあるすべての末端の論理式の下に
$\neg B$
$\neg C$
を加える。
・$\neg(B \vee C)$ のその出現に $\surd$ をつける。
$\mathcal{Q}$ において、新しく加えられた
$\neg B$
$\neg C$
の $\neg C$ を $\mathcal{Q}$ の末端の論理式という。
6. $(\neg\neg)$　$\mathcal{P}$ が $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図で、$\mathcal{P}$ に $\surd$ のない $\neg\neg B$ が出現するとき、次によって得られる図 $\mathcal{Q}$ も $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図である。
・$\mathcal{P}$ において $\neg\neg B$ のその出現の下にあるすべての末端の論理式の下に
B
を加える。
・$\neg\neg B$ のその出現に $\surd$ をつける。
$\mathcal{Q}$ において、新しく加えられた B を $\mathcal{Q}$ の末端の論理式という。
7. 2 の $(\wedge)$ および 4 の $(\neg\wedge)$ と同様に、$(\rightarrow)$ および $(\neg\rightarrow)$、$(\leftrightarrow)$ および $(\neg\leftrightarrow)$ も規定する。

$\mathcal{P}$ が $\mathbf{S} \vdash A$ の反証図であり、B は、その末端の論理式とする。$\mathcal{P}$ において、ある論理式 C とその否定 $\neg C$ が、B あるいは B より上に現れるとき、末端 B は閉じているという。実際に反証図を作るときは、B が閉じていることを示すために、B の下に補助的に $\times$ をつける。

定義 5.2 反証図 $\mathcal{P}$ は、すべての末端が閉じているとき、矛盾的であるという。また、$\mathcal{P}$ における文記号と文記号の否定以外の論理式の出現に $\surd$ がついているとき、$\mathcal{P}$ は完全であるという。

補助定理 5.3 $\mathbf{S} \vdash A$ の矛盾的反証図が存在する $\Leftrightarrow$ $\mathbf{S} \vdash A$ の矛盾的完全反証図が存在する

6　証明可能性、妥当性、完全反証図の関係

ここでは、3 節、4 節、5 節で述べた 3 つの概念の同等性を証明する。具体的には、次の定理 6.1 を示す。

定理 6.1 論証形式 $\mathbf{S} \vdash A$ に対して、次の 4 条件は同等である。
(1)$\mathbf{S} \vdash A$ は証明可能である
(2)$\mathbf{S} \vdash A$ は妥当である
(3)$\mathbf{S} \vdash A$ の反証図はどれも矛盾的である
(4)$\mathbf{S} \vdash A$ の矛盾的完全反証図がある

ここで、補助定理 5.3 より、(4) はつぎの $(4)'$ とも同等となることに注意しておく。

$(4)'$ $\mathbf{S} \vdash A$ の矛盾的反証図がある

定理 6.1 を証明するには、まず、「(1)$\Rightarrow$(2)」を示し、「(2)$\Rightarrow$(3)」を示す。ここで、「(3)$\Rightarrow$(4)$'$」は明らかだから、補助定理 5.3 より「(3)$\Rightarrow$(4)」が得られる。そして、「(4)$\Rightarrow$(1)」を示す。これらから、定理 6.1 が証明されたことになる。

参考文献

[1] John Nolt/Dennis Rohatyn：現代論理学 (I), オーム社出版 (1995).
[2] 小野寛晰 著：情報科学における論理, 日本評論社 (1994).