様相論理と古典述語論理

2001MM034 川原 竜太
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

小野 [1] の章末問題に『様相論理 $S5$ の様相演算 □ と古典述語論理の全称記号 ∀ は似たようなふるまいを示すことが知られている.』という記述があり，2 つの論理の対応が誘導式の練習問題としてあげられている．本研究では，ある部分では，[1] の誘導にしたがって，またある部分では，別の方法で 2 つの論理の対応を示す.

2　体系 LK

まず，2 つの論理の共通の基礎となる，命題論理のシークエント計算の体系 LK を導入する.

定義 2.1 論理式の定義

1) それぞれの命題変数は論理式である.
2) A，B がともに論理式ならば，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \supset B)$，$(\neg A)$ はいずれも論理式である.

シークエント計算の体系は式と呼ばれるものを基本表現として与える．式とは

$$A_1,\cdots,A_m \to B_1,\cdots,B_n$$

という形をした表現である.

LK は，LK の公理と LK の推論規則から定義される.

2.1　LK の公理

A を任意の論理式とするとき,$A \to A$ の形の式だけが LK の公理である.

2.2　推論規則

$S_1,S_2,\cdots,S_n,S(n=1,2,\cdots)$ をそれぞれ式とするとき,

$$\frac{S_1 \quad S_2 \quad \cdots \quad S_n}{S}$$

の形の図形を推論規則という.$S_1,\cdots,S_n$ をそれぞれこの推論規則の上式 (upper sequent)，S を下式 (lower sequent) という.

2.3　LK の推論規則

(1) 式の構造に関する推論規則

($weakening$ 左)
$$\frac{\Gamma \to \Delta}{A,\Gamma \to \Delta}$$

($weakening$ 右)
$$\frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, A}$$

($contraction$ 左)
$$\frac{A,A,\Gamma \to \Delta}{A,\Gamma \to \Delta}$$

($contraction$ 右)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A, A}{\Gamma \to \Delta, A}$$

($exchange$ 左)
$$\frac{\Gamma, A, B, \Pi \to \Delta}{\Gamma, B, A, \Pi \to \Delta}$$

($exchange$ 右)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A, B, \Sigma}{\Gamma \to \Delta, B, A, \Sigma}$$

(cut)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad A, \Pi \to \Sigma}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Sigma}$$

(2) 論理記号に関する推論規則

(∧左 1)
$$\frac{A,\Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}$$

(∧左 2)
$$\frac{B,\Gamma \to \Delta}{A \wedge B, \Gamma \to \Delta}$$

(∧右)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \wedge B}$$

(∨左)
$$\frac{A,\Gamma \to \Delta \qquad B,\Gamma \to \Delta}{A \vee B, \Gamma \to \Delta}$$

(∨右 1)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}$$

(∨右 2)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \vee B}$$

(¬左)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A}{\neg A, \Gamma \to \Delta}$$

(¬右)
$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg A}$$

(⊃ 左)
$$\frac{\Gamma \to \Delta, A \qquad B, \Pi \to \Sigma}{A \supset B, \Gamma, \Pi \to \Delta\Sigma}$$

(⊃ 右)
$$\frac{A, \Gamma \to \Delta, B}{\Gamma \to \Delta, A \supset B}$$

3　様相論理 $S5$

ここでは様相論理 $S5$ を導入する．まず，定義 2.1 の論理式を様相論理の論理式に拡張する．様相論理の論理式の定義は定義 2.1 に，さらに □ に関するつぎの条件 3) を加えたものである.

3) A が論理式ならば $(\Box A)$ は論理式である.

[1] では，様相論理 $S5$ の体系を定義するために，まず，体系 K を導入している．そして K に 2 つの公理を加えた形で $S5$ を定義している．さらに LK に 2 つの推論規則を加えた体系 $S5^*$ を定義し，$S5^*$ と $S5$ との同等性を述べている．ここでは，$S5^*$ だけを用いるので，様相論理 $S5$ の体系として $S5^*$ のみを導入する.

体系 $S5^*$ は 2 節で導入した体系 LK に, 次の推論規則を加えたものである.

$$\frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}(\Box)$$

$$\frac{A, \Gamma \to \Delta}{\Box A, \Gamma \to \Delta}(\Box \text{左}) \qquad \frac{\Box\Gamma \to \Box\Delta, A}{\Box\Gamma \to \Box\Delta, \Box A}(\Box \text{右} - S5)$$

ただし，Γ が $B_1,\cdots,B_m$ のとき $\Box\Gamma$ は $\Box B_1,\cdots,\Box B_m$ を表すものとする.

4　シークエント体系 LK

この節では $S5$ に対応する述語論理を導入する．ここで導入する述語論理の論理式は，一変数の述語記号 p^*，q^*，$\cdots$，対象変数 x，量化記号 ∀ および，2 節で用いた論理記号と「(」,「)」から構成される．結果として，ここで定義される論理は [1] で定義された述語論理の体系の部分体系となる.

定義 4.1 論理式

1) p^* が一変数の述語記号のとき，$p^*(x)$ は論理式である．
2) A，B がともに論理式ならば，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \supset B)$，$(\neg A)$ はいずれも論理式である．
3) A が論理式ならば，$(\forall x A)$ は論理式である．

古典述語論理は古典命題論理の体系 LK にさらに次の推論規則を導入することによって定義できる．

(∀ 左) $\dfrac{F(x), \Gamma \to \Delta}{\forall x F(x), \Gamma \to \Delta}$　　(∀ 右) $\dfrac{\Gamma \to \Delta, F(x)}{\Gamma \to \Delta, \forall x F(x)}$

ただし，(∀ 右) においては，x はその推論規則の下式に自由に現れてはいけない (∀ をともなわずに現われてはいけない)．

ここで定義された LK に対して，次の定理が知られている．

定理 1 式 $\Gamma \to \Delta$ が LK で証明可能ならば，$\Gamma \to \Delta$ に到る LK の証明図で cut を一度も用いないものが存在する．

5 $S5^*$ と LK の関係

この節では 3 節で定義した $S5^*$ と 4 節で定義した LK の関係を述べる．まず，様相論理の論理式に，述語論理の論理式を対応させる関数 ψ をつぎのように帰納的に定義する．

$\psi(p) = p^*(x)$　　p が命題変数のとき
$\psi(A \circ B) = \psi(A) \circ \psi(B)$　　$\circ$ が $\supset, \wedge, \vee$ のとき
$\psi(\neg A) = \neg \psi(A)$
$\psi(\Box A) = \forall x \psi(A)$

また，Γ を様相論理の論理式の列 $A_1, \cdots, A_m$ とするとき，列 $\psi(A_1), \cdots, \psi(A_m)$ を $\psi(\Gamma)$ と表すことにする．このとき，次の定理が成立する．

定理 2 様相論理の任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対して，次の 2 条件は同値である．

(1) $\Gamma \to \Delta$ が $S5^*$ で証明可能
(2) $\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ が LK で証明可能

定理の証明は，次節で行う．

6 $S5^*$ と古典述語論理の体系 LK

ここでは定理 2 の証明を行う．定理 2 の (1)⇒(2) を定理 3 で，(2)⇒(1) を定理 4 で示す．定理 3 の証明は [1] の誘導にしたがうが，定理 4 は [1] の誘導とは異なる方法で証明する．4 節で述べたとおりここでの LK は [1] で定義された LK の部分体系である．この結果として [1] の誘導で用いられる意味論に関するいくつかの概念は，証明に不要となり，形式体系のみの世界で定理 4 を証明できることになる．

定理 3 様相論理の任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し，$\Gamma \to \Delta$ が $S5^*$ で証明可能ならば $\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ が LK で証明可能となる．

この定理は次の (1)，(2)，(3) から導かれる．

(1) $\Gamma \to \Delta$ が公理のとき，$\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ が LK で証明可能である．

(2) $\dfrac{\Gamma_1 \to \Delta_1}{\Gamma \to \Delta}$ が $S5^*$ の推論規則で $\psi(\Gamma_1) \to \psi(\Delta_1)$ が LK で証明可能であるとき $\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ が LK で証明可能である．

(3) $\dfrac{\Gamma_1 \to \Delta_1 \quad \Gamma_2 \to \Delta_2}{\Gamma \to \Delta}$ が $S5^*$ の推論規則で $\psi(\Gamma_1) \to \psi(\Delta_1)$ と $\psi(\Gamma_2) \to \psi(\Delta_2)$ が LK で証明可能であるとき $\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ が LK で証明可能である．

定理 4 $\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ が LK で証明可能ならば $\Gamma \to \Delta$ が $S5^*$ で証明可能である．

$A \to B$ も $B \to A$ も $S5^*$ で証明可能のとき，$A \equiv B$ とかく．定理 4 を示すのに，つぎの補助定理を使う．証明は X の構成に関する帰納法で行う．

補助定理 $\psi(A) = X$ であり，X に x が自由に現れないならば，$A \equiv \Box A$ となる．

定理 4 の証明

$\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ を終式とする LK の証明図の構成に関する帰納法で示す．定理 1 より，その証明図に cut はないと仮定して示せば十分である．

$\psi(\Gamma) \to \psi(\Delta)$ の LK の証明図が少なくとも 1 つの推論規則をもち，一番最後に適用されたもの I が (∀ 右) のときのみを示す.I は次の形である．

$$\frac{X_1, \cdots, X_m \to Y_1, \cdots, Y_n, F(x)}{X_1, \cdots, X_m \to Y_1, \cdots, Y_n, \forall x F(x)}$$

ただし，$\psi(\Gamma)$ は $X_1, \cdots, X_m$ という列なので，Γ は $B_1, \cdots, B_m$ という列で $\psi(B_i) = X_i$ をみたす．各 X_i には，x は自由に現われないので，補助定理より，$B_i \equiv \Box B_i$ である．$\psi(\Delta)$ は $Y_1, \cdots, Y_n, \forall x F(x)$ という列なので，Δ は $C_1, \cdots, C_n, \Box A_1$ という列で $\psi(C_j) = Y_j, \psi(A_1) = F(x)$ をみたす．各 Y_j には，x は自由に現われないので，補助定理より，$C_j \equiv \Box C_j$ である．よって，$(\psi(B_1, \cdots, B_m) \to \psi(C_1, \cdots, C_n, A_1)) = (X_1, \cdots, X_m \to Y_1, \cdots, Y_n, F(x))$ である．帰納法の仮定より，$B_1, \cdots, B_m \to C_1, \cdots, C_n, A_1$ が $S5^*$ で証明可能である．$B_i \equiv \Box B_i, C_j \equiv \Box C_j$ であったので，$\Box B_1, \cdots, \Box B_m \to \Box C_1, \cdots, \Box C_n, A_1$ も $S5^*$ で証明可能である．$(\Box$ 右 $-S5)$ より，$\Box B_1, \cdots, \Box B_m \to \Box C_1, \cdots, \Box C_n, \Box A_1$ が $S5^*$ で証明可能である．$B_i \equiv \Box B_i, C_j \equiv \Box C_j$ をもう一度用いると，$B_1, \cdots, B_m \to C_1, \cdots, C_n, \Box A_1$，すなわち $\Gamma \to \Delta$ が $S5^*$ で証明可能である．

参考文献

[1] 小野寛晰:情報科学における論理, 日本評論社 (1994).