正規様相論理の決定可能性

2001MM008 長谷川 照明

指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

本研究では，様相論理のなかでも正規な様相論理を対象とする．そして，小野 [1] の第 4 章で紹介されている，正規様相論理において，与えられた式が証明可能かどうかを判定できる有限の手続きが存在すること (決定可能性) を理解することを目的とする．

本論文の構成は [1] にしたがったが，[1] では省略されていたり，練習問題とされていたりしている部分もきちんと補って構成した．

2　様相論理

2.1　様相論理の論理式

定義 2.1 様相論理の論理式はつぎの 1)，2) により帰納的に定義する．

1) それぞれの命題変数および命題定数 $\perp$ は論理式である．
2) A，B がともに論理式ならば，$(A \wedge B)$，$(A \vee B)$，$(A \supset B)$，$(\neg A)$，$(\Box A)$ はいずれも論理式である．

しばしば $\neg\Box\neg A$ を $\Diamond A$ と省略する．また $A_1, \cdots, A_m$ のような有限個の論理式をコンマで区切って並べた列を表す記号として Γ，Δ を使用することとする．

2.2　体系 K

本研究では体系 **K** を古典命題論理の sequent 計算の体系 LK につぎの $\Box$ に関する推論規則を付け加えた体系として定義する．

$$\frac{\Gamma \to A}{\Box\Gamma \to \Box A}\ (\Box)$$

ただし，Γ が $B_1, \cdots, B_m$ のとき $\Box\Gamma$ は $\Box B_1, \cdots, \Box B_m$ を表すものとする．

2.3　正規な様相論理

始式としては，**K** の 2 つの始式 $A \to A$ と $\perp \to$ を含み，推論規則としては，**K** の推論規則をすべて含むような様相論理を正規な様相論理という．正規な様相論理を定義するために，いくつかの論理式の型 $\mathbf{X_1}, \cdots, \mathbf{X_k}$ に対し，始式として

$$\to \mathbf{X_i} \qquad (i = 1, \cdots, k)$$

を体系 **K** に付け加えることを行う．このようにして定義される様相論理を $\mathbf{KX_1} \cdots \mathbf{X_k}$ と表す．また，これらの $\mathbf{X_1}, \cdots, \mathbf{X_k}$ をこの様相論理の公理型という．以下に本研究で使用する公理型を挙げておく．

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{T} & : & \Box A \supset A \\ \mathbf{4} & : & \Box A \supset \Box\Box A \\ \mathbf{B} & : & A \supset \Box\Diamond A \\ \mathbf{5} & : & \Diamond A \supset \Box\Diamond A \end{array}$$

ただし [1] にしたがって，**KT4** および **KT5** はそれぞれ，**S4** および **S5** と表す．

3　クリプキによるセマンティクス

定義 3.1 クリプキ・フレーム

空でない集合 M と M 上の二項関係 R の対 (M, R) を様相論理に対するクリプキ・フレームという．M および R をそれぞれこのクリプキ・フレームの可能世界の集合および到達可能関係という．

定義 3.2 クリプキ・モデル

(M, R) をクリプキ・フレームとする．また V を各命題変数 p に対し $V(p) \subseteq M$ となるような写像とする．このとき，V をフレーム (M, R) 上の付値という．そして 3 組 (M, R, V) をクリプキ・モデルという．与えられたクリプキ・モデル (M, R, V) に対し，M の要素と論理式の間の二項関係 $\models$ をつぎのように帰納的に定義する．

1) $a \models p \Longleftrightarrow a \in V(p)$　　　(p は命題変数)
2) $a \models A \wedge B \Longleftrightarrow a \models A$ かつ $a \models B$
   ($A \vee B$，$A \supset B$，$\neg A$ についても同様に定義する)
3) $a \models \Box A \Longleftrightarrow aRb$ となるすべての b に対し $b \models A$

$a \models A$ であるとき，「(可能世界)a で A は真である」という．「$a \models A$ でない」ことは $a \not\models A$ と表す．関係 $\models$ は付値 V から一意的に定まるので，今後は V と $\models$ を同一視して，$\models$ のことを付値といったり，$(M, R, \models)$ のことをクリプキ・モデルといったりする．

Γ が論理式の列 $A_1, \cdots, A_m$ を表すとき，論理式 Γ^* 及び Γ_* をつぎのように定める．

$$\Gamma^* = \begin{cases} A_1 \vee \cdots \vee A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \perp & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$\Gamma_* = \begin{cases} A_1 \wedge \cdots \wedge A_m & m > 0 \text{ のとき} \\ \neg\perp & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

定義 3.3 恒真な論理式，恒真な式

フレーム (M, R) 上の任意の付値 $\models$ と M の任意の要素 a に対して $a \models A(a \models \Gamma_* \supset \Delta^*)$ となるとき，論理式 A(式 $\Gamma \to \Delta$) は (M, R) で恒真であるという．

クリプキ・モデル $(M, R, \models)$ において，ある $b(\in M)$ に対し $b \not\models A(b \not\models \Gamma_* \supset \Delta^*)$ となるとき，$(M, R, \models)$ で論理式 A(式 $\Gamma \to \Delta$) は偽であるという．またある付値 $\models$ に対し，$A(\Gamma \to \Delta)$ が $(M, R, \models)$ で偽であるとき，$A(\Gamma \to \Delta)$ はフレーム (M, R) で偽であるという．

到達可能関係 R と公理型の関係から各フレーム (M, R) を定義です．

定義 3.4 フレーム

1) R が反射的 $\Longleftrightarrow (M, R)$ は **KT** フレーム.
2) R が反射的かつ対称的 $\Longleftrightarrow (M, R)$ は **KTB** フレーム.
3) R が反射的かつ推移的 $\Longleftrightarrow (M, R)$ は **S4** フレーム.
4) R が反射的かつユークリッド的 $\Longleftrightarrow (M, R)$ は **S5** フレーム.

4 健全性

様相論理 **L** を **K**, **KT**, **KTB**, **S4**, **S5** のどれかであるとする.

定理 4.1 健全性

任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し, $\Gamma \to \Delta$ が様相論理 **L** で証明可能ならば, $\Gamma \to \Delta$ はそれぞれ任意の **L** フレームで恒真である.

定理 4.1 はつぎの 1), 2) より示すことができる.

1) 任意の始式は **L** フレームで恒真である.
2) それぞれの推論規則において上式が **L** フレームで恒真なら下式もそのフレームで恒真である.

5 完全性

定理 5.1 完全性

任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し, $\Gamma \to \Delta$ が **L** フレームで恒真ならば, $\Gamma \to \Delta$ は様相論理 **L** で証明可能である.

定義 5.2 カノニカルなクリプキ・モデル

様相論理 **L** のカノニカルなクリプキ・モデル $(M_L, R_L, \models_L)$ を, つぎの 1) から 4) によりを定める.

1) $M_L = \{U(\subseteq \Phi) | (U, \Phi - U)$ は **L** で極大無矛盾 $\}$
2) $U \in M_L$に対し, $U_\Box = \{A | \Box A \in U\}$
3) $U_1, U_2 \in M_L$に対し, $U_1 R_L U_2 \Longleftrightarrow (U_1)_\Box \subseteq U_2$
4) 任意の $U \in M_L$および任意の命題変数 p に対し, $U \models_L p \Longleftrightarrow p \in U$

ただし対 (U, V) が極大無矛盾であるとは, 有限個の論理式 $A_1, \cdots, A_m (\in U)$ および, $B_1, \cdots, B_n (\in V)$ に対して, 式 $A_1, \cdots A_m \to B_1, \cdots, B_n$ が証明不可能であり, なおかつ U と V の和集合が論理式全体の集合となることをいう.

定理 5.1 はつぎの 2 つから示すことができる.

- **L** で証明不可能な式は **L** のカノニカルなクリプキ・モデルで偽となる.
- **L** のカノニカルなクリプキ・モデル $(M_L, R_L, \models_L)$ に対し, (M_L, R_L) は **L** フレームである.

6 決定可能性

6.1 有限モデル性

定義 6.1 様相論理 **L** が有限フレームのあるクラスに関して完全であるとき, **L** は有限モデル性を持つという.

ただし **L** があるクラスに関して完全であるとは, 任意の式 $\Gamma \to \Delta$ に対し $\Gamma \to \Delta$ が **L** で証明可能なとき, またそのときに限り $\Gamma \to \Delta$ がそのクラスのすべてのフレームで恒真であることをいう.

定理 6.2 様相論理 **L** は有限モデル性を持つ.

完全性 (定理 5.1) より, ある式 $\Gamma \to \Delta$ が証明可能でないとき, その式を偽にするようなモデル $(M, R, \models)$ が存在する. このモデルに対し, 濾過法により $\Gamma \to \Delta$ を偽にする有限フレーム (可能世界の集合が有限集合であるようなフレーム) をつくる.

この有限フレームを用いて定理 6.2 がいえる.

6.2 決定可能性

定理 6.3 様相論理 **L** が有限公理化可能 (**K** に有限個の公理型を付け加えた体系により定義できること) でしかも有限モデル性を持つならば, **L** は決定可能である.

これは式 $\Gamma \to \Delta$ が与えられたとき, 2 つのステップを繰り返す手続きを行なうことにより示される. 1 つ目のステップ (ステップ 1) では $\Gamma \to \Delta$ の証明可能性を調べる. 2 つ目のステップ (ステップ 2) では $\Gamma \to \Delta$ が証明不可能である可能性を調べる. これは **L** が有限モデル性を持つことから, 証明不可能であれば, それを偽とする有限フレームが必ず存在ので, あるフレームで $\Gamma \to \Delta$ が偽となる可能性を調べることで行なう.

具体的にはつぎのようである.

ステップ 1

まず論理式全体を一列に並べる. 自然数 k に対し, 1 番目から k 番目の論理式のみでつくられ, なおかつそれぞれの論理式は高々k 個しか現われないような式を考える. つぎにこのような式 k 個以下でつくられる **L** の証明図全体の集合を Θ_k とする. そして Θ_k に $\Gamma \to \Delta$ の証明図があれば, この手続きをやめ, なければステップ 2 に進む.

ステップ 2

自然数 k に対し, k 個の可能世界をもつ集合からなるフレームを考える. このようなフレームに対し, 同型なものを同一視し, 代表を 1 つづつ取り出し, 集めた集合を Ξ_k とする. そして Ξ_k の中で, $\Gamma \to \Delta$ を偽にし, なおかつ **L** のすべての公理型を恒真とするフレームがあれば, この手続きをやめ, なければ k を $k+1$ としてステップ 1 に戻る.

さて, 集合 Θ_k および, Ξ_k は有限集合であり, 様相論理 **L** は有限公理化可能で, 有限モデル性を持つので, この手続きは, 有限の手続きで終了する.

いまステップ 1 で終了したとすると $\Gamma \to \Delta$ は証明可能であり, またステップ 2 で終了したとすると $\Gamma \to \Delta$ は証明不可能である.

参考文献

[1] 小野寛晰：情報科学における論理, 日本評論社 (1994).