ゲーデルの定理とスマリアンの論理パズル

2001MM002 秋本 有香
指導教員　佐々木 克巳

1　はじめに

スマリアン [1] は、ゲーデルの定理を、単純な数理システム、およびそれに対応した論理パズルの 2 つの面から説明している。前半でゲーデルの第 2 不完全性定理に関係するものについて述べ、後半では主にゲーデルの定理に関連するレーブの定理、およびゲーデルの第 1 不完全性定理に関係するものについて述べている。

本研究は、[1] におけるこれらの内容を理解することでゲーデルの定理の理解を深めることを目的とする。

2　議論の舞台

ここでは、ゲーデルの定理を説明するために [1] で用意された 2 つの舞台を説明する。

まず 2 つの舞台に共通して 6 つの記号 $\sim,\&,\vee,\supset,\equiv,\perp$ を、それぞれ "ではない"、"かつ"、"または"、"もし $\cdots$ ならば"、"もし $\cdots$ ならば、そしてそのときにかぎり"、"論理的矛盾" に対して用いる。以下、2.1 節と 2.2 節で、2 つの舞台について詳しく述べる。

2.1　システムの定義

第 1 の舞台は数理システムである。そのシステムは次の特徴をもつ。これらは、ゲーデルが分析したある種のシステムの特徴である。

(1) そのシステムで表現可能な命題がはっきりと定義された集合を構成する。それらの命題の中には、$\perp$ があり、また、p,q がそのシステムの命題とすると、命題 $(p \supset q)$ もそのシステムの命題である。
(2) そのシステムは、そのシステムで特定の命題を証明可能にするさまざまな公理や推論規則をもつ。
(3) そのシステムの任意の命題 p に関して、「p はそのシステムで証明可能である」という命題自体がそのシステムの命題である。

ここで、Bp を「p がそのシステムで証明可能である」という命題とする。更に、段階的に高まる自意識の度合に対応して、1 型、2 型、3 型、4 型のシステム S を定義する。

1 型のシステム S
次の (1),(2) をみたすシステムを 1 型のシステムという。

(1) 全ての恒真式が証明可能である。
(2) S において、次の命題が真である。

$$(Bp\&B(p \supset q)) \supset Bq \tag{2.1}$$

2 型のシステム S
(2.1) の形式の全ての命題が S で証明可能である 1 型のシステムを 2 型のシステムという。

3 型のシステム S
システムが命題 p を証明可能ならば Bp も証明可能であるとき、そのシステムは p に関して正常であるという。

正常な 2 型のシステムを 3 型のシステムという。3 型のシステムにおいて、次の命題が真である。

$$Bp \supset BBp \tag{2.2}$$

4 型のシステム S
(2.2) の形式の全ての命題が S で証明可能である 3 型のシステムを 4 型のシステムという。

2.2　推論者の定義

第 2 の舞台は、2.1 節のシステムに対応した論理パズルの舞台である。具体的には、[1] では次の 3 条件を満たす騎士と奇人の島を舞台としている。

(1) 騎士は本当のことしか言わない。
(2) 奇人は間違ったことしか言わない。
(3) 全ての住人は騎士か奇人のどちらかである。

そしてこの島における "n 型の推論者 ($n \in \{1,2,3,4\}$)" を、2.1 節における「システム」を「推論者」、「証明可能」を「信じる」という言葉に変え、同様に定義する。

2.3　整合性

ある推論者が信じている (あるいはこれから信じるだろう) 全ての命題の集合が $\perp$ を含まない場合、その推論者は整合であるという。また、そうでない場合は、彼は不整合であるという。

また、システムについても同様に定義する。

3　ゲーデルの第 2 不完全性定理

ゲーデルの第 2 不完全定理とは、算術ができるほど強力で整合性をもつ数理システムは、けっして自分自身の整合性を証明することができない、という定理である。この定理は、2 つの舞台では次のように表現される。

3.1　ゲーデル的推論者

ある推論者が命題 $p \equiv\sim Bp$ を信じるような命題 p が少なくとも 1 つ存在するとき、その推論者をゲーデル的推論者という。

定理 1 4 型のゲーデル的推論者は、自分が整合であると信じるならば、彼は不整合になる。

3.2　ゲーデル的システム

命題 $p \equiv\sim Bp$ がそのシステムで証明可能であるような命題 p が少なくとも 1 つ存在するシステムをゲーデル的システムという。そのシステムにおいて、命題 $p \equiv\sim Bp$ は、「命題 p は自分の証明不可能性と同値である」を意味する。

ここで、定理 1 を推論者でなくシステムについて考えると、以下の定理を得る。

定理 2 もし、4 型のゲーデル的システムがその整合性を証明できるならば、そのシステムは不整合である。

4 自己充足信念とレーブの定理

ここではレーブの定理について述べる。

4.1 反射性

全ての命題 q について命題 p が少なくとも 1 つ存在して、推論者が $p \equiv (Bp \supset q)$ を信じるならば、その推論者は反射的であるという。また、システムについても同様に定義する。

ここで、k を「住人が騎士である」という命題とする。

定理 3 任意の命題 p および k について、もし 4 型の推論者が $Bp \supset p$ を信じ、かつ $k \equiv (Bk \supset p)$ を信じるならば彼は p を信じる。

定理 3 で k に任意の命題 p を代入して考えても、同じことがいえる。したがって、次の定理が生じる。

定理 4 任意の命題 p について、もし反射的な 4 型の推論者が $Bp \supset p$ を信じるならば、彼は p を信じる。

この定理 4 はシステムについても明らかに成り立つ。これがレーブの定理となる。全ての命題 p について、「$Bp \supset p$ が S の中で証明可能ならば p も S の中で証明可能である」が成立するとき、S をレーブ的システムという。

定理 5 (レーブの定理) 任意の反射的な 4 型のシステム S と任意の表現可能な命題 p について、もし $Bp \supset p$ が S の中で証明可能ならば p も S で証明可能である。

5 G 型

ここでは、レーブの定理に関係した性質を述べる。

推論者が $Bp \supset p$ を信じるならば p も信じる場合に、彼は命題 p に対してレーブ的と定義する。次に、もし推論者が、全ての命題 p について、$B(Bp \supset p) \supset Bp$ を信じているならば、彼は「自分がレーブ的であると信じている」というとし、自分がレーブ的であると信じている 4 型の推論者を、G 型の推論者というとする。

また、G 型のシステムについても同様に定義する。

定理 6 以下の 4 つの条件は同値である。

(i) 彼はレーブ的な 4 型の推論者である。
(ii) 彼は G 型である (4 型で自分がレーブ的だと信じている)。
(iii) 彼は 3 型で、自分がレーブ的だと信じている。
(iv) 彼は反射的な 4 型の推論者である。

この定理 6 を証明するため、以下の定理を使う。

定理 7 4 型の推論者は、自分がレーブ的であると信じているならば、そしてそのときにかぎりレーブ的である。

定理 7 から、推論者はレーブ的で 4 型であるならば、そしてそのときにかぎり G 型であることがわかる。これで条件 (i) と (ii) が同値であることがいえる。

定理 4 で、全ての反射的な 4 型の推論者はレーブ的であることを示した。これと定理 7 を組み合わせることにより、次の定理を得る。

定理 8 全ての反射的な 4 型の推論者は G 型である。

任意の G 型の推論者は反射的となるので、次の定理を得る。

定理 9 4 型の推論者が反射的ならば、そしてそのときにかぎり G 型である。

これで条件 (iv) と (ii) が同値であることがわかる。

定理 10 (クリプキ・デジョン・サンビンの定理) 自分がレーブ的だと信じている全ての 3 型の推論者は G 型である。

これで条件 (iii) から (ii) がいえることがわかる。また、4 型の推論者は当然 3 型の推論者でもあるので、これで条件 (ii) から (iii) がいえる。したがって、定理 6 の条件 (i) から (iv) までが同値であることが示された。

以上のことは、システムについても同様にいえる。

6 ゲーデルの第 1 不完全性定理

ここでは、ゲーデルの第 1 不完全性定理について述べる。

全ての命題 p について、Bp が証明可能であるならば p も証明可能であるとき、そのシステムは安定であるという。ゲーデルの第 1 不完全性定理はシステムの言葉で次のように表現できる。

定理 11 任意の整合で正常で安定な 1 型のゲーデル的システムは、不完全でなければならない。つまり、S が正常な 1 型のシステムで、p が $p \equiv \sim Bp$ が S で証明可能であるようなある命題であるとき、S が整合なら p は S で証明不可能で、S が安定なら $\sim p$ も S で証明不可能である。

7 論理機械

7.1 証明可能性

以上をふまえて、4 型でゲーデル的である具体的な論理機械を考えると、それはゲーデルの第 2 不完全性定理 (定理 2) に従う。よって次の定理を得る。

定理 12 もし機械が整合であるならば、自分自身の整合性を証明できない。

7.2 機械の正確性

システムが証明できる全ての命題が真であるならば、そのシステムは正確であるという。

定理 13 その機械は正確である。

系 その機械は整合でかつ安定である。

上の系と、定理 12 より、この機械は整合で安定であり、自分自身の整合性はけっして証明できない。わたしたちはその機械が整合であると知っているけれども、その機械にはその知識がない。

参考文献

[1] レイモンド・スマリアン著：長尾確、田中朋之訳：決定不能の論理パズル ゲーデルの定理と様相論理, 白揚社 (1990).